



# Variétés de Gray et géométries spéciales en dimension 6

Jean-Baptiste Butruille

## ► To cite this version:

Jean-Baptiste Butruille. Variétés de Gray et géométries spéciales en dimension 6. Mathématiques [math]. Ecole Polytechnique X, 2005. Français. NNT: . tel-00118939

**HAL Id: tel-00118939**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00118939>**

Submitted on 7 Dec 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE POUR OBTENIR LE TITRE DE  
DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : MATHÉMATIQUES

Présentée par Jean-Baptiste Butruille

Variétés de Gray et géométries  
spéciales en dimension 6

soutenue le 4 octobre 2005 devant le jury composé de :

M. Vestislav APOSTOLOV  
M. Jean Pierre BOURGUIGNON  
M. Paul GAUDUCHON  
M. Andrei MOROIANU, Directeur de thèse  
M. Simon SALAMON  
M. Andrei TELEMAN

Rapporteurs : M. Simon SALAMON et M. Andrew SWANN

## Remerciements

Merci en premier à Andrei d'avoir été un directeur de thèse extrêmement patient et disponible, confiant mais pas trop, soucieux que j'apprenne. Merci à lui de m'avoir indiqué les problèmes et même quelquefois les solutions ! Merci pour la liberté qu'il m'a donnée, dans l'emploi du temps et le travail, sans relâcher sa sollicitude.

Merci à Paul, mon excellent professeur en DEA et le collègue, constamment souriant et de bon conseil. Merci aux autres professeurs, Jean Barges, Daniel Mollier, etc., qui, comme lui, savent rendre les mathématiques belles et nécessaires. Merci à d'autres professeurs encore, à la distance de l'écrit, Simon Salamon, Nigel Hitchin, Robert L. Bryant, d'autres, que j'ai lus pendant ma thèse, qui continuent à me faire aimer mon domaine.

J'ai été frappé et je suis très reconnaissant de la précision du rapport adressé par Andrew Swann, l'attention rigoureuse qu'il a voulu porter aux 185 pages de ma thèse ! J'admire aussi la la compréhension dont témoigne le rapport de Simon Salamon des problèmes que j'ai abordés, qui dépasse beaucoup la mienne ! Je les remercie tous deux d'avoir accepté de lire, et si bien lu, mon travail.

Merci à l'autre Andrei, Telemann, de me permettre d'être payé en m'accueillant cette année. Ce que je sais déjà du laboratoire, le LATP, et de la ville de Marseille me rendent impatient d'y être. Merci à lui d'avoir accepté de participer à mon jury, ainsi qu'à Vestislav Apostolov, qui m'aurait également accueilli à Montréal, et à Jean-Pierre Bourguignon.

Merci à Michelle et Claudine, mes voisines, qui non contentes de faire marcher le labo, l'animent.

Merci à Fred-de-chez-Grégoire-en-face, d'avoir été là les jours où le courage manquait, d'avoir fumé 843 cigarettes et bu 911 cafés avec moi, en trois ans. Je comprends que tu aies eu besoin de partir au New Jersey.

Merci Max de me pistonner l'an prochain. Merci à toi de nous donner l'image d'un mathématicien accompli, entre Rome et Madras. Merci à Max et Matthieu de m'avoir souvent nourri, au 105, et transporté, sur les routes de France mais plus difficilement jusqu'en Navarre, et à Antoine de m'avoir logé. Merci aussi, par l'intermédiaire du dernier, à Paco, Dick, Thomas, les trois Michel, j'en passe.

Merci à Lolo d'avoir eu cette drôle d'idée en même temps que moi : faire des maths après Polytechnique.

Merci à Sibylle de m'avoir aiguillonné ! Merci la Reine Sibylle de m'emmener en voyage avec toi à Paraty. Merci de me suivre et de me précéder. Et vive la Belle de Mai !

On m'a dit que ces remerciements manquaient de filles : merci les potes Cécile et Béber. Message spécial à eux deux : elle est vraiment Plus belle la vie !

Merci en vrac à mes amis, mes amies, ma famille, spéciale dédicace à Lou et au futur Lucien, merci à tous d'être là et si vous n'êtes pas venus, ou si vous n'avez pas pu, merci quand même.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b> .....	5
<b>1. G-structures et G-connexions</b> .....	13
1.1. G-structures et réductions des G-structures .....	13
1.2. Connexions et torsion intrinsèque d'une G-structure .....	22
1.3. Espaces homogènes .....	40
<b>2. Représentations</b> .....	47
2.1. Représentations réelles, représentations complexes .....	47
2.2. Poids et racines .....	52
2.3. Décomposition irréductible des produits tensoriels .....	63
<b>3. Variétés presque hermitiennes</b> .....	71
3.1. Variétés complexes, variétés presque complexes .....	71
3.2. Variétés presque hermitiennes, classification de Gray-Hervella .....	75
3.3. Réduction d'une variété presque hermitienne de dimension 6 à $SU(3)$ .....	83
<b>4. Variétés approximativement kähleriennes et variétés de Gray</b> .....	99
4.1. Structure $SU(3)$ naturelle d'une variété de Gray .....	99
4.2. Courbure et torsion intrinsèque d'une variété NK .....	102

4.3. Holonomie faible .....	109
<b>5. Classification des variétés NK homogènes .....</b>	<b>125</b>
5.1. Introduction .....	125
5.2. Espaces 3-symétriques .....	127
5.3. Espaces homogènes presque hermitiens .....	138
5.4. Le groupe de Lie $S^3 \times S^3$ .....	143
5.5. Espaces homogènes quotients de groupes produits des sphères .....	149
5.6. L'espace des drapeaux .....	151
5.7. L'espace projectif complexe de dimension 3 .....	155
5.8. La sphère de dimension six .....	158
<b>6. Espace de twisteurs réduit d'une variété presque hermitienne de dimension 6 .....</b>	<b>161</b>
6.1. Introduction .....	161
6.2. L'espace de twisteurs réduit et sa structure presque complexe .....	164
6.3. Résolution des équations d'intégrabilité .....	169
6.4. Variétés de type $W_1 \oplus W_4$ .....	177
6.5. Variétés presque hermitiennes conformes .....	181
6.6. Conclusion .....	187
<b>Bibliographie .....</b>	<b>189</b>

# INTRODUCTION

Les objets étudiés dans cette thèse sont des variétés presque hermitiennes. On ne regarde pas tant ces dernières comme des généralisations des variétés complexes – d’ailleurs la structure presque complexe des variétés qui nous intéressent, aux chapitres 4, 5 ou 6 n’est pas intégrable – que comme des exemples de  $G$ -variétés (des variétés réelles admettant une réduction du fibré des repères à un sous groupe linéaire  $G$ ) où  $G = U(n)$ , le groupe unitaire. Parmi les groupes de Lie pouvant advenir comme groupe d’holonomie d’une variété riemannienne non localement symétrique, irréductible, d’après la liste faite par Berger [8], certains groupes –  $SU(n)$ ,  $G_2$ ,  $Spin(7)$  et  $Sp(q)$  – peuvent être définis comme les stabilisateurs dans  $GL(m, \mathbb{R})$  d’une ou plusieurs formes extérieures sur  $\mathbb{R}^m$ . Alors une  $G$ -structure sur une variété  $M$  de dimension  $m$  correspond à l’existence d’une forme différentielle  $\alpha$  (ou encore de plusieurs formes différentielles) satisfaisant certaines conditions algébriques. Par exemple la présentation moderne du groupe exceptionnel  $G_2$  (voir par exemple [11]) insiste sur la 3-forme de  $\mathbb{R}^7$  qu’il préserve. L’avantage est que la condition d’holonomie réduite (ou d’intégrabilité à l’ordre 1 de la  $G$ -structure) s’exprime simplement par le fait que la forme différentielle  $\alpha$  est parallèle pour la connexion de Levi-Civita  $\nabla$ ; autrement dit la torsion intrinsèque est identifiée à la dérivée covariante  $\nabla\alpha$ .

Au contraire, pour définir une réduction à  $U(n)$  on a besoin, outre la forme de Kähler, soit de la métrique, soit de la structure presque complexe. Cependant, certaines variétés presque hermitiennes en dimension 6 ont une réduction supplémentaire naturelle à  $SU(3)$ . Le groupe  $SU(3)$  est le stabilisateur, non pas d’une mais de deux formes de  $\mathbb{R}^6$ . Par conséquent une structure  $SU(3)$  sur une variété de dimension 6 correspond à la donnée d’une 2-forme  $\omega$  et d’une 3-forme  $\psi$  vérifiant

$$(1) \quad \omega \wedge \psi = 0.$$

D'après Hitchin [36], celles-ci suffisent à retrouver la structure presque complexe  $J$ , la métrique  $g$  et la forme volume complexe

$$(2) \quad \Psi = \psi + i\phi, \quad \phi \in \Lambda^3$$

intervenant dans la description habituelle d'une variété spéciale presque hermitienne. Alors  $\omega$  est la forme de Kähler, de type  $(1,1)$ , et (1) s'interprète :  $\psi$  est de type  $(3,0) + (0,3)$ . En outre, la torsion intrinsèque est déterminée seulement par les différentielles,  $d\omega$ ,  $d\psi$  et  $d\phi$ , des trois formes invariantes (voir [16]). Par conséquent une classe de géométrie spéciale  $SU(3)$  est caractérisée par un système différentiel portant sur les formes différentielles  $\omega$ ,  $\psi$ ,  $\phi$ .

Maintenant, pour une variété presque hermitienne de dimension 6, la différentielle de la forme de Kähler  $d\omega$  est une 3-forme et sa partie de type  $(3,0)+(0,3)$  induit une réduction à  $SU(3)$ , sur un ouvert où elle ne s'annule pas. Dès lors, la caractérisation par un système différentiel est toujours possible, au moins localement, pour certaines classes de variétés presque hermitiennes (non intégrables) de dimension 6. Ce système différentiel est de loin plus facile à manipuler que la condition originale utilisant la connexion de Levi-Civita. C'est cette stratégie qui est utilisée pour obtenir deux résultats centraux de cette thèse.

Cette démarche a été inaugurée par Reyes Carrión [47] pour les variétés approximativement kähleriennes (« nearly-Kähler », en anglais, nous abrégerons NK) où elle apparaît particulièrement naturelle. Alfred Gray avait en effet noté dans [30] une propriété essentielle des variétés NK non kähleriennes en dimension 6 : la propriété dite « de type constant ». Pour nous cela signifie qu'elles admettent une réduction globale à  $SU(3)$ , avec la particularité que la 3-forme  $\psi = d\omega$  dans ce cas est exacte. En effet la différentielle de la forme de Kähler est de type  $(3,0)+(0,3)$ , de norme constante, pour une variété NK. Le système différentiel dont on parlait est alors remarquablement simple. En le posant de cette façon, le problème de la recherche des structures NK invariantes sur le produit de sphères  $S^3 \times S^3$  devient possible à résoudre, or il est central pour la classification des variétés NK homogènes accomplie au chapitre 5.

Le deuxième résultat concerne la classification de Gray, Hervella [31]. On montre que toute variété de la classe  $W_1 \oplus W_4$  est localement conforme à une variété NK en dimension 6. Pour cela on montre que la 1-forme de Lee  $\theta$  apparaissant dans la décomposition de  $d\omega$  est fermée donc représente localement, par le lemme de Poincaré, un changement conforme de métrique. Là encore, la présentation de cette classe par un système différentiel est pertinente : c'est en le différentiant qu'on obtient les informations nécessaires sur  $d\theta$ .



Ces deux résultats prennent part chacun à un problème plus large.

Pour le premier, on l'a dit, il s'agit de la classification des variétés NK non kähleriennes homogènes en dimension 6. On apporte en même temps la réponse à une vieille conjecture de Gray et Wolf [53] : toutes les variétés strictement NK (i.e. qui ne peuvent pas être décomposées en un produit d'une variété kählerienne par une variété NK), homogènes sont des espaces 3-symétriques. Ces derniers sont définis par Gray [29] comme des espaces homogènes  $G/H$  où le groupe  $G$  est muni d'un automorphisme d'ordre 3 dont  $H$  est l'ensemble des points fixes. Cette configuration est moins singulière qu'il paraît. En effet on montre que les espaces localement 3-symétriques sont des variétés presque hermitiennes telles que la torsion et la courbure de la connexion intrinsèque sont parallèles, un cas particulier de variété localement homogène. Pour une  $G$ -structure générale, R. Cleyton et A. Swann [17], [18] construisent une situation très générale où cela arrive en considérant des  $G$ -variétés telles que la représentation de  $G$  sur l'espace tangent est irréductible et la torsion intrinsèque est une 3-forme. La dernière condition est vérifiée par définition par les variétés NK. Dès lors, un thème secondaire de cette thèse est le lien entre les géométries spéciales et les espaces homogènes.

Pour le second, la question de trouver quelles sont les variétés de type  $W_1 \oplus W_4$  en dimension 6 est apparue en cherchant à quelles conditions la structure presque complexe de l'espace de twisteurs réduit d'une variété presque hermitienne est intégrable. Ce dernier est construit au chapitre 6 comme la sous variété de l'espace de twisteurs conforme engendrée par les sections, ou les structures presque complexes compatibles avec la métrique, commutant avec la structure presque complexe de départ de la variété presque hermitienne. Un autre thème secondaire par conséquent est la géométrie twistorielle, en lien avec les  $G$ -structures.

On va maintenant résumer le contenu de cette thèse, chapitre par chapitre.

Le chapitre 1 est consacré à des faits élémentaires concernant les  $G$ -structures, les  $G$ -connexions et, à la dernière section, les espaces homogènes réductifs. Un lecteur moyennement expérimenté pourra le passer. On établit l'équivalence entre les points de vue d'une  $G$ -structure définie par un fibré principal ou par un tenseur. L'exposé est centré sur la notion de torsion intrinsèque. La torsion intrinsèque  $\bar{\eta}$  d'une  $G$ -structure est nulle si et seulement si cette dernière est intégrable à l'ordre 1 ou dans le cas où  $G \subset SO(m)$  si et seulement si l'holonomie riemannienne est contenue dans  $G$ . Mais on peut aussi demander qu'une partie seulement de  $\bar{\eta}$  s'annule. Cela définit des géométries spéciales qui ne sont pas des holonomies spéciales. Ce chapitre a surtout pour objet de fixer un cadre général et des notations. Il présente peut-être seulement deux résultats qui ne sont pas tout à

fait classiques. D'abord on reproduit les équations de Cleyton exprimant la différence de la courbure de la connexion intrinsèque avec la courbure riemannienne en fonction de la torsion intrinsèque et de sa dérivée covariante. Ces équations (1.37) et (1.41) seront utiles au chapitre 4, section 2 ainsi qu'au chapitre 6, section 3. Deuxièmement, la fin de la section 3 est consacrée aux espaces localement homogènes : comment reconstruire un espace homogène à partir d'une connexion  $\tilde{\nabla}$  dont la torsion et la courbure sont parallèles :

$$(3) \quad \tilde{\nabla}T = 0, \quad \tilde{\nabla}\tilde{R} = 0$$

Cela sera utile au chapitre 5, les espaces localement 3-symétriques correspondant au cas où  $\tilde{\nabla}$  est la connexion intrinsèque d'une variété presque hermitienne, quasi-kählerienne.

Chapitre 2. Dans ce chapitre non plus il n'y a pas de résultat nouveau mais un exposé sur la théorie des représentations : là encore, le lecteur qui connaît un peu ce domaine n'apprendra presque rien, au moins jusqu'à la section 3. Le but est de pouvoir expliquer la méthode de Salamon [48], chapitre 6, de décomposition « à la main » des produits tensoriels. Cela consiste à calculer les poids dominants des composantes irréductibles de  $V \otimes W$  et leur multiplicité en manipulant la liste de tous les poids de  $V$  auxquels on ajoute le poids dominant de  $W$  (il n'est pas nécessaire de connaître les autres poids de  $W$ ). De cette façon on calcule proposition 2.3.2 la décomposition irréductible de l'espace des tenseurs de courbure hermitienne algébriques, en vue de la résolution des équations du chapitre 6, section 2 et 3. On en profite pour fixer quelques notations : l'espace des  $r$ -formes réelles de type  $(p, q) + (q, p)$ ,  $p + q = r$  est noté  $[[\lambda^{p,q}]]$  si  $p \neq q$  ou  $[\lambda^{p,p}]$  sinon. De plus la section 1 est consacrée aux relations entre les représentations réelles et complexes d'un groupe.

Le chapitre 3 est central, bien qu'il ne contienne presque aucun résultat original. A la section 1 on parle de choses bien connues, sur les variétés complexes et presque complexes. A la section 2 on parle de la classification de Gray, Hervella [31] avec beaucoup de précisions. Celle-ci consiste à décomposer l'espace où vivent la torsion intrinsèque ou  $\nabla\omega$  en chaque point en 4 composantes irréductibles sous l'action de  $U(n)$  :

$$\Lambda^1 \otimes [[\lambda^{2,0}]] = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$$

de telle sorte que chaque sous-espace  $W = \bigoplus_{i \in I} W_i$ ,  $I \subsetneq \{1, 2, 3, 4\}$  définit une classe de géométrie spéciale, presque hermitienne en demandant que la torsion intrinsèque  $\bar{\eta} \in W$ . C'est l'objet de la proposition 3.2.5 dont grâce au chapitre 2 on peut donner une preuve plus courte que l'originale, sans passer par les invariants quadratiques, ce qu'avaient d'ailleurs déjà fait Salamon lui-même avec Falcitelli, Farinola dans l'article [20]. Bien sûr le sous-espace nul correspond à la géométrie kählerienne. Le sous-espace  $W_1$  correspond à la classe des variétés NK. Le principe de cette classification peut être appliqué pour

classifier les  $G$ -structures, quel que soit le groupe de Lie  $G \subset SO(m)$ . Par exemple, pour  $G_2$ , cela avait été fait par le même Gray et Fernandez dans [21]. Pour  $SU(n)$  c'est un travail récent de Chiossi, Salamon [16] lorsque  $n = 3$  – le cas qui nous intéresse surtout à la section 3 – et de Cabrera [15] pour  $n$  quelconque. Le seul résultat original de cette section consiste en quelques précisions apportées par rapport à [16], au lemme 3.3.14 et à la proposition 3.3.16, qui seront cruciales au moment de caractériser les variétés de type  $W_1 \oplus W_4$  au chapitre 6, section 4. On remarque aussi ici que la 3-forme  $\phi$  dans (2) ne dépend que de  $\psi$ ,  $J$ . Or, par une remarque de Hitchin, la structure presque complexe est elle-même déterminée par la 3-forme  $\psi$ . En effet le stabilisateur de cette dernière est isomorphe en tout point à  $SL(3, \mathbb{C})$ . Lorsqu'on recherchera au chapitre 5, section 4, les structures NK invariantes de  $S^3 \times S^3$ , cela permet d'éviter jusqu'au dernier moment de calculer la métrique. De plus, on obtient cette dernière à partir de  $\omega$  et  $J$  donc  $\psi$ . Cela suggère qu'on peut caractériser les variétés  $SU(3)$  uniquement en termes des formes différentielles  $\omega$ ,  $\psi$ ,  $\phi$ . En effet, de même que la torsion intrinsèque d'une variété presque hermitienne est déterminée par la différentielle de la forme de Kähler  $d\omega$  et le tenseur de Nijenhuis  $N$  (si bien que les variétés kähleriennes peuvent être autrement définies comme les variétés à la fois complexes et symplectiques), on montre, section 3, après [15], que  $d\omega$ ,  $d\psi$ ,  $d\phi$  suffisent à déterminer la torsion intrinsèque d'une variété  $SU(3)$ .

Chapitre 4. Ce chapitre est consacré à une synthèse sur les variétés NK. La structure presque complexe d'une variété NK n'est pas intégrable, sauf si la variété est en fait kählerienne. Cependant sa torsion intrinsèque, comme variété presque hermitienne, vérifie deux propriétés importantes étudiées en général pour une  $G$ -variété par Cleyton [17]. D'abord, par définition, elle est totalement antisymétrique. Ensuite, elle est parallèle pour la connexion intrinsèque  $\bar{\nabla}$  (la connexion hermitienne canonique). Cela a quelques conséquences importantes. La connexion intrinsèque préserve une 3-forme  $\psi$  via la métrique. Comme c'est une connexion métrique,  $\psi$  est de norme constante par conséquent, vu son type algébrique, en dimension 6, ou bien elle est identiquement nulle et la variété est kählerienne, ou bien la variété admet une réduction à  $SU(3)$ . C'est ce deuxième cas qui nous intéresse particulièrement : les variétés NK non kähleriennes en dimension 6 sont appelées, dans cette thèse, variétés de Gray. On les étudie à la section 1. Proposition 4.1.8 on montre, après Reyes-Carrion [47], qu'elles sont caractérisées par un système différentiel simple portant sur  $\psi$  et  $\omega$ . À la section 2, on s'intéresse à la relation entre la courbure et la torsion intrinsèque : on montre que la torsion intrinsèque d'une variété NK est parallèle pour  $\bar{\nabla}$  (proposition 4.2.2). Puis on montre proposition 4.2.10 que la courbure riemannienne d'une variété de Gray est très proche d'un tenseur de courbure de type Calabi-Yau. Les variétés à holonomie contenue dans  $SU(3)$  sont Ricci-plates. Alors les variétés de Gray sont d'Einstein (théorème 4.2.8), comme A. Gray l'avait démontré

lui-même dans [30]. Notre preuve est conceptuellement plus simple : proche de celle de [20], elle fait appel à l'étude des représentations plutôt qu'à des formules explicites. Enfin à la section 3 on parle d'holonomie faible. On cherche à rendre compte des propriétés communes plusieurs fois constatées dans des travaux de formes très différentes (voir [4], [28], [36]) de certaines géométries spéciales en petites dimensions 5, 6, 7, 8. Notre point de vue est plus proche de celui de l'article [49] de U. Semmelmann. On appelle variété à holonomie faible une variété riemannienne admettant une forme de Killing spéciale. Remarquons qu'une variété à holonomie réduite contenue dans  $G$ , pour les groupes déjà cités, n'est autre qu'une variété admettant une ou plusieurs formes parallèles d'un certain type algébrique. Une conséquence des travaux de Christian Bär [4] repris par U. Semmelmann [49] est que le cône d'une variété à holonomie faible est à holonomie réduite. Ainsi le cône d'une variété de Gray est à holonomie contenue dans  $G_2$  (corollaire 4.3.15). Puis en combinant des observations comme celle de Hitchin dans [36] qu'on peut définir une structure  $SU(3)$  uniquement par  $\omega$  et  $\psi$  et d'autres comme celle de Chiossi, Salamon (voir chapitre 3) que la torsion intrinsèque est entièrement déterminée par les différentielles des formes, on voit qu'on peut se passer a priori de la métrique.

Chapitre 5. Le contenu de ce chapitre suit assez fidèlement l'article [13], sauf la section 2, un exposé sur les espaces 3-symétriques, qui a été ajoutée. Pour le reste, on a seulement supprimé quelques passages qui seraient redondants avec les propres préliminaires de cette thèse et revu quelques notations. Les espaces 3-symétriques définis par Gray [27] en 1970 sont une généralisation presque point par point des espaces symétriques riemanniens. Ce sont des espaces homogènes  $M = G/H$  réductifs : il existe un supplémentaire  $Ad(H)$ -invariant de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  de  $H$  dans l'algèbre de Lie de  $G$  :  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ . Pour les espaces symétriques,  $G$  est muni d'une involution  $s$ , un automorphisme d'ordre 2, tel que  $\mathfrak{h}$  est le sous-espace propre pour la valeur 1 et  $\mathfrak{m}$  est le sous-espace propre pour la valeur propre -1 de la différentielle de  $s$  à l'origine. Pour les espaces 3-symétriques  $s$  est un automorphisme d'ordre 3 et on choisit  $\mathfrak{m}$  pour avoir, au niveau du complexifié,

$$(4) \quad \mathfrak{m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{m}^{1,0} \oplus \mathfrak{m}^{0,1}$$

où  $\mathfrak{m}^{1,0}$  (resp.  $\mathfrak{m}^{0,1}$ ) est le sous-espace propre associé à la valeur  $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  (resp.  $j^2$ ). Alors que les espaces symétriques riemanniens ont en général seulement une structure métrique, une telle décomposition (4) pour les espaces 3-symétriques est équivalente à la donnée d'une structure presque complexe invariante telle que la variété est quasi-kählerienne. Si on demande que l'espace homogène soit naturellement réductif, la variété est NK. On a aussi une notion d'espace localement 3-symétrique : on montre proposition 5.2.12 que ce sont les variétés quasi-kähleriennes telles que la torsion et la courbure de la

connexion intrinsèque sont parallèles :

$$(5) \quad \bar{\nabla} \bar{\eta} = 0, \quad \bar{\nabla} \bar{R} = 0$$

En particulier une telle variété est localement homogène (voir (3)). On peut voir (5) comme une généralisation de l'équation  $\nabla R = 0$  définissant une variété localement symétrique (en effet la connexion de Levi-Civita est sans torsion). Maintenant, Gray et Wolf [53] ont conjecturé réciproquement que tout espace strictement NK homogène est un espace 3-symétrique. La résolution de cette conjecture est un résultat original de cette thèse et l'objet de ce chapitre. Elle est rendue vraisemblable pour nous par le fait qu'on a déjà  $\bar{\nabla} \bar{\eta} = 0$  (cf chapitre 4) donc il ne reste qu'à démontrer la deuxième partie de (5). Mais c'est une autre méthode qu'on emploie. On classe les variétés de Gray et on vérifie que ce sont toutes des espaces 3-symétriques connus. Or P.A. Nagy avait classifié partiellement les variétés strictement NK homogènes en toute dimension dans [43] en les décomposant en produit d'espaces 3-symétriques et de variétés strictement NK homogènes de dimension 6. A la section 3 on fait une première liste d'espaces homogènes qui peuvent admettre une structure strictement NK invariante (lemme 5.3.4). On les examine un par un. Section 4 on résout le problème pour  $S^3 \times S^3$  en utilisant le système différentiel de Reyes Carrion. Ce cas est le plus difficile car on ne peut s'appuyer sur l'isotropie, réduite à 0. Section 5 on traite des cas qui s'y ramènent. Considérés respectivement aux section 6 et 7, l'espace projectif complexe  $\mathbb{C}P(3)$  et l'espace de drapeaux  $F(1, 2)$  sont des espaces de twisteurs kähleriens au dessus de variétés riemanniennes de dimension 4,  $S^4$  et  $\mathbb{C}P(2)$ . En variant la métrique et la structure presque complexe le long de la fibre on obtient une variété de Gray telle que l'holonomie de  $\bar{\nabla}$  est contenue dans  $U(2)$  ([47], p57). Pour montrer qu'il n'y a pas d'autre structure NK, non kählerienne à une homothétie près sur ces espaces, la méthode est de décomposer la représentation d'isotropie. Pour  $\mathbb{C}P(3)$ , il y a deux composantes irréductibles donc l'espace des métriques invariantes est de dimension 2 et si on s'autorise un changement d'échelle il ne reste que les métriques twistorielles. On conclut par un théorème de Friedrich dans [23]. Pour  $F(1, 2)$  la démarche est similaire bien qu'il y ait trois composantes irréductibles. Enfin à la section 8, pour la sphère de dimension 6, munie de sa métrique ronde, on utilise que le cône dans ce cas est plat. Alors une structure NK sur  $S^6$  correspond à une 3-forme générique constante sur  $\mathbb{R}^7$ , par le théorème de Bär cité au chapitre 4, section 3 ou 4.3.15.

Chapitre 6. Ce chapitre contient essentiellement 2 résultats originaux, résumés par les théorèmes 6.1.1 et 6.1.2, qui ont fait l'objet de l'article unique [14]. On considère la sous-variété  $Z$  de l'espace de twisteurs classique associé à une métrique riemannienne (ou une classe conforme) formée des structures presque complexes compatibles avec la métrique et qui commutent avec la structure presque complexe d'une variété presque hermitienne

$(M, g, J)$ . On munit  $Z$  d'une structure presque complexe  $\mathcal{J}$  en utilisant une connexion hermitienne  $\tilde{\nabla}$ . Une première question naturelle est : à quelle condition deux connexions définissent la même structure presque complexe sur l'espace de twisteurs réduit. Une autre question naturelle est l'intégrabilité de  $\mathcal{J}$ . Finalement, par la proposition 6.3.5, seule la structure presque complexe associée à la connexion hermitienne canonique  $\overline{\nabla}$  peut être intégrable. Les conditions pour que cela arrive portent sur la torsion de  $\overline{\nabla}$  – la torsion intrinsèque – et sa courbure et s'expriment naturellement en termes de représentations de  $U(n)$ . On utilise des décompositions obtenues au chapitre 2. On trouve d'abord que la variété doit être de type  $W_1 \oplus W_4$  dans la classification de Gray, Hervella. Alors on montre, théorème 6.4.5, que les variétés de type  $W_1 \oplus W_4$  sont localement conformément NK ce qui constitue le premier résultat annoncé. On s'inspire de l'étude des variétés NK, on tente d'exporter les méthodes utilisées au chapitre 4. Grâce au chapitre 3, section 3, ces variétés peuvent être caractérisées localement par un système différentiel. En le résolvant on montre que la forme de Lee est fermée. En revenant à l'espace de twisteurs, on montre finalement que la structure presque complexe de l'espace de twisteurs réduit est intégrable si et seulement si, en dimension 6, la variété est localement conforme à la sphère  $S^6$  avec sa structure NK canonique, ou en dimension paire quelconque strictement supérieure à 4, localement conforme à une variété kählérienne, Bochner-plate. C'est le second résultat. A la section 5, on situe le premier résultat de ce chapitre comme une pièce d'un problème plus général. Parmi les 4 composantes de la torsion intrinsèque dans  $W_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , les trois premières sont invariantes par un changement conforme. Par conséquent la classe  $\bigoplus_{i \in I} W_i \oplus W_4$ ,  $I \subset 1, 2, 3$  contient les variétés localement conformes à des variétés de type  $\bigoplus_{i \in I} W_i$  et on peut se demander si ce sont les seules. La réponse est positive par exemple pour  $W_4$ , la classe des variétés localement conformément kählériennes ainsi que, on l'a montré, pour la classe  $W_1 \oplus W_4$  en dimension 6. En revanche on montre au corollaire 6.5.9 qu'il existe des variétés de type  $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$  non localement conformes à des variétés de type  $W_1 \oplus W_2$  (quasi-kählériennes). On introduit une notion de géométrie conforme presque hermitienne mieux adaptée aux problèmes traités dans ce chapitre.

# CHAPITRE 1

## G-STRUCTURES ET G-CONNEXIONS

### 1.1. G-structures et réductions des G-structures

Soit  $M$  une variété réelle de dimension  $m$ ,  $TM$  son fibré tangent. On note  $GL(M)$  le *fibré des repères* de  $M$  dont la fibre au-dessus de  $x \in M$ ,  $GL_x(M)$ , est l'ensemble des bases de  $T_xM$ . On note  $\pi : GL(M) \rightarrow M$  la projection correspondante.

Un changement de base de  $T_xM$  est représenté par une matrice inversible de taille  $m \times m$ , soit un élément du groupe  $GL(m, \mathbb{R})$ , qui agit dès lors sur  $GL_x(M)$ . Ou bien, un élément  $p \in GL_x(M)$  peut aussi être vu comme un isomorphisme  $p : \mathbb{R}^m \rightarrow T_xM$  et l'action de  $GL(m, \mathbb{R})$  consiste en la composition à droite :  $pg = p \circ g$ . Cette action est libre et transitive sur chaque fibre ou de façon équivalente si on considère l'action de  $GL(m, \mathbb{R})$  sur la variété  $GL(M)$  entière,  $M \simeq GL(M)/GL(m, \mathbb{R})$ . Ceci fait de  $GL(M)$  un *fibré principal* de groupe  $GL(m, \mathbb{R})$ , au sens de la

**Définition 1.1.1.** — *Un fibré principal de groupe  $G$  est la donnée de deux variétés  $P$  et  $M$  et d'une submersion  $\pi : P \rightarrow M$  telles que*

- (i)  $G$  agit librement à droite sur  $P$ . On note cette action  $(g, p) \mapsto pg$  ou  $R_g(p)$ .*
- (ii)  $M \simeq P/G$  et  $\pi$  est la projection canonique.*
- (iii) Le fibré  $\pi : P \rightarrow M$  est localement trivial :  $\forall x \in M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  et un difféomorphisme*

$$\begin{aligned} P|_U = \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times G \\ p &\mapsto (\pi(p), g_U(p)) \end{aligned}$$

*où  $g_U$  est  $G$ -équivariant.*

Ce qui est spécial avec les fibrés principaux c'est que par l'action d'un élément du groupe  $G$  on peut obtenir n'importe quel élément d'une fibre à partir d'un autre. Par conséquent une section locale  $s_U$  de  $P$ , définie sur  $U$ , définit une trivialisatation locale en posant, quel que soit  $p \in P$  avec  $\pi(p) = x \in U$  que  $g_U(p)$  est l'unique élément de  $G$  vérifiant  $p = s_U(x)g_U(p)$ . En particulier  $P$  est trivial, c'est-à-dire isomorphe globalement au fibré trivial  $M \times G$  (pour lequel  $\pi$  est la première projection), si et seulement si il possède une section globale.

Maintenant, lorsque deux ouverts  $U, V$  de  $M$  associés à des trivialisations locales  $s_U, s_V$ , ont une intersection non nulle, la *fonction de transition*  $h_{UV} : U \cap V \rightarrow G$  est définie par  $s_V = s_U h_{UV}$ .

Les fonctions de transition vérifient  $h_{UU} = e$ ,  $h_{UV} = h_{VU}^{-1}$  et enfin, pour  $U \cap V \cap W \neq \{0\}$ ,  $h_{UV}h_{VW} = h_{UW}$ . Réciproquement si on se donne un recouvrement de  $M$  par des ouverts et des fonctions associées, à valeurs dans  $G$ , avec ces propriétés, on peut construire un fibré principal dont elles soient les fonctions de transitions. On arrive à une autre définition d'un fibré principal : à isomorphisme près, c'est un élément du premier groupe de cohomologie de Čech sur le faisceau des fonctions de  $M$  à valeurs dans  $G$ .

Une section locale de  $GL(M)$  est appelée *repère local* de  $M$  ou  $TM$ . Le fibré  $GL(M)$  est défini pour une variété réelle quelconque mais on s'intéresse à des variétés spéciales munies de sous-fibrés principaux de  $GL(M)$ , associés à des sous-groupes de  $GL(m, \mathbb{R})$ .

**Définition 1.1.2.** — Soient  $\pi : P \rightarrow M$  un fibré principal de groupe  $G$  et  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$ . On appelle *réduction de  $P$  à un sous-groupe fermé  $H$*  un sous-fibré principal  $Q$  de groupe  $H$ .

Cela signifie qu'on peut choisir les sections  $s_U$  plus haut à valeurs dans ce sous-fibré c'est-à-dire encore telles que les fonctions de transitions  $h_{UV}$  soient à valeurs dans  $H$ . Le groupe  $H$  agit bien sûr sur  $P$  par restriction de l'action de  $G$  et si on les a choisies de cette façon, toutes les sections  $s_U$  sont équivalentes, en quotientant par cette action. Elles définissent donc une section globale du fibré  $P/H$ . On a donc une définition alternative

**Définition 1.1.3 (bis).** — Soit  $\pi : P \rightarrow M$  un fibré principal de groupe  $G$ . Une *réduction de  $P$  à  $H$*  est une section  $s : M \rightarrow P/H$ .

Les deux définitions sont liées par  $Q_x = \pi_H^{-1}(s(x))$  où  $\pi_H$  est la projection canonique  $P \rightarrow P/H$ .

NB : en définissant une réduction  $Q$  de  $P$  à  $H$  on définit en même temps toutes les réductions isomorphes :  $Qg, g \in G$ .



Maintenant, soit  $G$  un sous-groupe de  $GL(m, \mathbb{R})$ , une  $G$ -structure sur  $M$  est une réduction du fibré des repères  $GL(M)$  à  $G$ . Nous nous intéresserons particulièrement dans cette thèse aux structures  $U(n)$  en dimension paire  $m = 2n$ . En général on notera  $G(M)$  une  $G$ -structure de  $M$  en omettant le cas échéant la dimension dans le nom de  $G$  : par exemple on notera  $Sp(M, \mathbb{R})$ , non  $Sp(2n, \mathbb{R})(M)$ , une structure  $Sp(2n, \mathbb{R})$ , où  $Sp(2n, \mathbb{R}) \subset GL(2n, \mathbb{R})$  est le groupe symplectique. Il s'agit d'une notation abusive, puisqu'il existe fréquemment plusieurs réductions non isomorphes de  $GL(M)$  à un sous-groupe linéaire  $G$  donné, mais qui veut justement indiquer qu'on en a distinguée une, soit qu'on étudie toujours ensemble une variété  $M$  et une  $G$ -structure fixée une fois pour toute,  $G(M)$ . Ainsi une variété presque hermitienne  $M^{2n}$  est une variété réelle avec une structure  $U(n)$ , notée  $U(M)$ . Lorsqu'on étudiera, chapitre 6, l'espace de twisteurs réduit de cette variété, dont les sections sont des structures presque complexes – d'autres structures  $U(n)$  –, cela évitera qu'on les confonde avec la première, qui a permis de définir l'espace de twisteurs.

Si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , lui même un sous-groupe de  $GL(m, \mathbb{R})$ , on a une projection évidente  $GL(M)/H \rightarrow GL(M)/G$ . L'image d'une réduction à  $H$ , donnée par une section  $s : M \rightarrow GL(M)/H$ , par cette projection est une section de  $GL(M)/G$  appelée  *$G$ -structure sous-jacente*. On pense par exemple au cas traité au chapitre 3, section 3, où  $H = SU(n)$  et  $G = U(n)$ .

Voici deux exemples bien connus :

- $G = GL_+(m, \mathbb{R})$ , le sous-groupe de  $GL(m, \mathbb{R})$  formés des matrices inversibles à déterminant strictement positif. Une variété admet une  $GL_+(m, \mathbb{R})$ -structure si et seulement si elle est orientable (i.e. admet une orientation « continue » de chaque espace tangent.) Le sous-fibré  $Q$  de  $P$  est l'ensemble des repères directs.
- $G = O(m)$ , le groupe orthogonal. Une structure  $O(m)$  est associée à une métrique  $g$  sur  $M$  et  $Q$  est l'ensemble des repères orthonormés.

L'intérêt de considérer en premier le fibré principal des repères est qu'on peut décrire tous les fibrés de tenseurs à travers lui. Plus généralement, soient  $(P, \pi)$  un  $G$ -fibré principal,  $\mathcal{V}$  une variété et  $(g, v) \mapsto \rho(g)v$  une action différentiable de  $G$  sur  $\mathcal{V}$ . On définit une action de  $G$  sur le produit  $P \times \mathcal{V}$  par

$$(1.1) \quad \forall g \in G, \quad g.(p, v) = (pg, \rho(g^{-1})v)$$

Alors

**Définition 1.1.4.** — *Le fibré associé à  $P$ , de fibre  $\mathcal{V}$  – on dit encore : le fibré associé à  $P$  par l'action  $\rho$  – est le quotient, noté  $P \times_G \mathcal{V}$  de  $P \times \mathcal{V}$  par l'action (1.1).*

Soit  $p \in P$  et  $v \in \mathcal{V}$ , la classe d'équivalence de  $(p, v)$  est notée  $[p, v]$ . On a donc

$$(1.2) \quad [p, v] = [pg, \rho(g^{-1})v]$$

Il s'agit bien d'un fibré sur  $M$ , de fibre isomorphe à  $\mathcal{V}$ , la projection étant donnée par  $[p, v] \mapsto \pi(p)$ .

Cette construction est particulièrement utilisée pour les espaces homogènes (voir section 3 de ce chapitre) ou lorsque la variété est un espace vectoriel et les difféomorphismes  $\rho(g)$ ,  $g \in G$ , des applications linéaires. Soit  $V$  un espace vectoriel, sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On note  $GL(V)$  le groupe des automorphismes de  $V$ , égal à  $GL(V, \mathbb{R})$  lorsqu'il est réel ou  $GL(V, \mathbb{C})$  s'il est complexe. De même on note  $\mathfrak{gl}(V)$  son algèbre de Lie, canoniquement identifiée à l'algèbre des endomorphismes de  $V$ . En avance sur le chapitre 2 on donne la définition suivante :

**Définition 1.1.5.** — Soit  $G$  un groupe de Lie. Une représentation de  $G$  sur un espace vectoriel  $V$  est un homomorphisme continu  $\rho : G \rightarrow GL(V)$

On peut la voir autrement comme une action  $G \times V \rightarrow V$ . Alors le fibré associé  $P \times_G V$  est un fibré vectoriel par

$$\forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \quad \lambda[p, u] + [p, v] = [p, \lambda u + v]$$

NB : comme  $G$  agit transitivement sur la fibre de  $P$ , en utilisant (1.2), deux éléments de  $P \times_G V$  dans la même fibre peuvent toujours s'écrire  $[p, u]$ ,  $[p, v]$  relativement à un même repère  $p$ .

On définit en outre une action dérivée de l'algèbre de Lie,

$$d\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

par

$$(1.3) \quad \forall v \in V, \quad d\rho(X)v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho(\exp(tX))v$$

Qu'est-ce à présent, dans ce formalisme, qu'une section  $\nu$  de  $P \times_G \mathcal{V}$ ? Il existe premièrement une section  $p$  de  $P$  et une section  $v$  de  $\mathcal{V}$  telles que pour tout  $x \in M$ ,  $\nu(x) = [p(x), v(x)]$ . Cependant, avec une telle écriture on privilégie arbitrairement un repère  $p(x)$  dans chaque fibre de  $P$ . De plus si  $\nu$  est une section globale de  $P \times_G \mathcal{V}$ , on ne peut pas prendre  $p$  différentiable sur tout  $M$ , à moins que  $P$  soit trivial. Il y a alors deux stratégies : on peut travailler localement sur un ouvert  $U$  de  $M$  et dans ce cas on s'arrange, grâce à la transitivité de l'action de  $G$  sur  $P$ , pour que  $p : U \rightarrow P$  coïncide avec une section locale distinguée de  $P$  (par exemple plus loin intégrable ou parallèle). La difficulté est alors reportée sur l'étude de la fonction  $v : U \rightarrow \mathcal{V}$ . Ou bien on rétablit

l'invariance par  $G$  : comme  $M = P/G$ , on voit  $v$  comme une fonction à valeurs dans  $P$  et ainsi  $\nu$  est identifiée à une fonction  $\boldsymbol{\nu} : P \rightarrow \mathcal{V}$ , équivariante

$$(1.4) \quad \boldsymbol{\nu}(pg) = d\rho(g^{-1})\boldsymbol{\nu}(p)$$

telle que

$$\nu(x) = [p, \boldsymbol{\nu}(p)]$$

quel que soit  $p \in P_x$ . L'avantage de cette façon de voir est que  $\boldsymbol{\nu}$  est à valeur dans un espace fixe, simple (vectoriel dans le meilleur des cas.)

Un cas particulier important est la représentation standard de  $GL(m, \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}^m$ . Le fibré associé de  $GL(M)$  par cette représentation est le fibré tangent. Soit  $X \in TM$ , on l'écrit  $X = [p, v]$  où  $p \in GL(M)$  et  $v \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des coordonnées de  $X$  dans le repère  $p$ . La notion de fibré associé d'un fibré principal peut dès lors être vue comme une généralisation des notions de repère et de coordonnées. En effet, de même que  $p \in GL(M)$  représentait un isomorphisme  $\mathbb{R}^m \rightarrow T_x M$ , où  $x = \pi(p)$ , pour un  $G$ -fibré principal  $P$  quelconque agissant sur une variété  $\mathcal{V}$ ,  $p \in P$  est identifié à l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\rightarrow (P \times_G \mathcal{V})_x \\ v &\mapsto [p, v] \end{aligned}$$

où  $x = \pi(p)$ .

Par le théorème de Peter-Weyl toute autre représentation de  $GL(m, \mathbb{R})$  peut être vue comme un sous-espace de  $\bigotimes^p \mathbb{R}^m \otimes \bigotimes^q (\mathbb{R}^m)^*$  pour deux entiers  $p$  et  $q$  et les fibrés associés de  $GL(M)$  sont les fibrés de tenseurs de  $M$  parmi lesquels les fibrés extérieurs : dans la suite on désigne par  $\Lambda^p$  (au lieu de  $\Lambda^p M$  ou  $\Lambda^p T^* M$ ) l'espace des  $p$ -formes de  $M$  et par  $\lambda^p = \Lambda_{\mathbb{C}}^p$  l'espace des  $p$ -formes complexes. En particulier on écrira souvent  $\Lambda^1$  le fibré co-tangent  $T^* M$ . Pour une  $G$ -structure  $G(M)$  (un sous-fibré principal de  $GL(M)$ ) et une représentation  $\rho$  de  $G$  sur  $V$ , le fibré associé  $G(M) \times_G V$  sera souvent noté  $V(M)$ , voire simplement  $V$ . Cela suppose généralement de noter différemment les espaces de représentations de sous-groupes distincts de  $GL(m, \mathbb{R})$ .

Pour un fibré principal  $P$  quelconque, on a les trois exemples fondamentaux suivants de fibrés associés. D'abord, par souci d'unité, notons que  $P$  est son propre fibré associé par la représentation à droite de  $G$  sur lui-même. Ensuite,  $G$  peut encore agir sur lui-même par conjugaison :  $(g, h) \mapsto \text{Inn}_g h = ghg^{-1}$ . Le fibré associé est noté  $\text{Int } P$  et appelé *fibré intérieur* de  $P$  et ses sections sont les *automorphismes intérieurs* de  $P$ . Enfin  $G$  agit sur son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  par la représentation adjointe (voir le chapitre suivant) et le fibré associé  $\mathfrak{p}$  est appelé *fibré adjoint*. Le fibré intérieur est un fibré en groupes pour l'opération

$[p, g][p, h] = [p, gh]$  (en ramenant au même repère). De même le fibré adjoint est un fibré en algèbres de Lie.

Il y a une action des sections locales du fibré intérieur sur le fibré principal : soient  $\Phi$  une section de  $Int P$  et  $p \in P_x$ . Il existe  $h \in G$  tel que  $\Phi(x) = [p, h]$ , alors on pose  $\Phi p = ph$ . On note que  $\Phi$  préserve les fibres de  $P$ . En outre, soit  $p' = pg$  un élément de la même fibre,  $\Phi(x) = [p, h] = [pg, g^{-1}hg]$  donc  $\Phi p' = pgg^{-1}hg = (\Phi p)g$  c'est-à-dire que  $\Phi$  est équivariant. Ces deux propriétés caractérisent les automorphismes intérieurs. Une autre façon de décrire cette action est en considérant la fonction équivariante  $\Phi : P \rightarrow G$  associée à  $\Phi$  (voir plus haut). Alors  $\Phi p = p\Phi(p)$ . On peut maintenant définir une action de  $Int P$ , ou des automorphismes intérieurs, sur tous les fibrés associés. Soit  $\nu$  un point (ou une section) de  $P \times_G \mathcal{V}$ . On note  $\Phi\nu$  l'action d'un automorphisme intérieur sur  $\nu$  définie par

$$(1.5) \quad \Phi[p, v] = [\Phi p, v] = [p, \rho(\Phi(p))v]$$

Lorsque la fibre est un espace vectoriel  $V$ , on peut en outre dériver cette action pour obtenir une action du fibré adjoint  $\mathfrak{p}$ . Soit  $A = [p, X] \in \mathfrak{p}$ , où  $X \in \mathfrak{g}$  et soit  $\nu$  un élément de  $P \times_G V$  au-dessus du même point. On pose  $\Phi_t = [p, \exp(tX)] \in Int P$ . Alors

$$(1.6) \quad A.\nu = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t \nu = [p, d\rho(\mathbf{A}(p))v]$$

Lorsque  $P = GL(M)$ , le fibré intérieur  $Int GL(M)$  et le fibré adjoint  $\mathfrak{gl}(M)$  agissent en particulier sur le fibré tangent. On peut alors les identifier respectivement au fibré des isomorphismes et au fibré des endomorphismes de  $TM$  (par là on entend que, fibre par fibre,  $Int_x GL(M)$ , resp.  $\mathfrak{gl}_x(M)$  sont constitués des isomorphismes, resp. des endomorphismes de  $T_x M$ .) Les fibrés associés sont les fibrés de tenseurs et on a besoin de d'explicitier (1.5), (1.6) lorsque  $\nu$  est une  $p$ -forme, une section de  $\Lambda^p$ , ou plus généralement un champ de tenseur  $p$ -fois covariant. Soit  $\nu \in \bigotimes^p T^*M$ . Soient  $X_1, X_2, \dots, X_p \in TM$ ,

$$(1.7) \quad \Phi\nu(X_1, \dots, X_p) = \nu(\Phi^{-1}X_1, \dots, \Phi^{-1}X_p)$$

et

$$(1.8) \quad A.\nu(X_1, \dots, X_p) = -\nu(AX_1, \dots, X_p) - \dots - \nu(X_1, \dots, AX_p)$$

NB : Conformément aux notations établies, le fibré adjoint de  $G(M)$  est  $\mathfrak{g}(M)$ .

Plus le sous-groupe  $G$  de  $GL(m, \mathbb{R})$  auquel on peut réduire  $GL(M)$  est petit, plus on a d'informations sur la variété. Beaucoup de tels sous-groupes peuvent être définis via une représentation de  $GL(m, \mathbb{R})$  comme le stabilisateur d'un certain tenseur. Par exemple

$O(m)$ , le groupe orthogonal, est défini comme le stabilisateur dans  $GL(m, \mathbb{R})$ , agissant sur le produit symétrique  $S^2(\mathbb{R}^m)^*$ , d'un produit scalaire (une forme bilinéaire symétrique non dégénérée) de  $\mathbb{R}^m$ . On sera particulièrement intéressé ici par les groupes définis comme stabilisateurs de formes extérieures.

Soit  $(V, \rho)$  une représentation fidèle de  $G$  (de telle sorte qu'on peut identifier  $G$  et son image par  $\rho$ ). Soit  $a$  un élément de  $V$ . On appelle  $H$  le stabilisateur de  $a$  dans  $G$ , l'ensemble des éléments  $h \in G$  tels que  $\rho(h)a = a$ .

$$H = \text{Stab}_G a$$

Alors la donnée d'un champ de tenseurs, une section  $\alpha$  de  $V(M)$ , qui ressemble en tout point à  $a$  est équivalente à la donnée d'une réduction à  $H$  de  $G(M)$ . « Ressembler » signifie ici qu'en tout point  $x \in M$  on peut trouver un repère de  $T_x M$  dans  $G(M)$  où les « coordonnées » de  $\alpha$  dans  $V$  soient  $a$ . C'est l'objet du lemme fondamental des  $G$ -structures :

**Lemme 1.1.6.** — Soient  $P$  une  $G$ -structure,  $\rho$  une action différentiable de  $G$  sur une variété  $\mathcal{V}$ ,  $a \in \mathcal{V}$ . Soit  $H$  le stabilisateur de  $a$  dans  $G$ . Il existe une réduction de  $P$  à  $H$  si et seulement si il existe une section globale  $\alpha$  du fibré associé  $P \times_\rho \mathcal{V}$  telle que

$$(1.9) \quad \forall x \in M, \exists p \in P_x \text{ tel que } \alpha(x) = [p, a]$$

*Démonstration.* — Supposons premièrement qu'il existe une section  $\alpha$  comme dans l'énoncé. Le sous-fibré principal  $Q$  de  $P$  qu'on cherche est justement formé de tous les éléments qui vérifient (1.9) :

$$Q = \{p \in P \mid [p, a] = \alpha(\pi(p))\}$$

Soit  $p, p'$  deux éléments de la même fibre de  $Q$ ,  $p' = pg$  on a  $[pg, a] = [p, a] = [pg, \rho(g)a]$  par (1.2) d'où, comme  $G$  agit simplement sur les fibres,  $\rho(g)a = a$  c'est-à-dire  $g \in H$ . Donc  $Q$  est bien un sous-fibré principal de  $P$  de groupe  $H$ .

Réciproquement, si on se donne  $Q$  et des sections locales  $s_U$  de  $Q$  associées à un recouvrement de  $M$  par des ouverts  $U$ ,  $\alpha$  est définie par la collection des sections  $[s_U, a]$  (c'est-à-dire  $x \in U \mapsto [s_U(x), a]$ ) de  $P \times_\rho \mathcal{V}$ . Elle est bien définie et ne dépend pas du choix des sections locales car si  $s_U, s_V$  sont deux sections associées à des ouverts  $U, V$  d'intersection non vide, la fonction de transition  $h_{UV}$  est à valeurs dans  $H$  d'où

$$[s_V, a] = [s_U h_{UV}, a] = [s_U, \rho(h_{UV})a] = [s_U, a]$$

sur  $U \cap V$ . □

Notons que cette réduction est définie moins par référence à un élément  $a$  particulier de  $\mathcal{V}$  que par rapport à des « propriétés » algébriques (par exemple la propriété d'être non-dégénérée pour une 2-forme) qu'il transmet au tenseur  $\alpha$ . Ces propriétés sont invariantes par  $G$  c'est-à-dire qu'elles sont caractéristiques d'une orbite de  $G$  dans  $V$ . Si on prend un élément  $a'$  de la même orbite  $\mathcal{O}$  que  $a$ ,  $a' = \rho(g)a$ ,  $g \in G$ , la réduction  $Q'$  définie par le lemme 1.1.6 n'est pas la même mais elle s'en déduit aisément :  $Q' = Qg$ . Par là on a d'ailleurs une identification des deux points de vue sur les réductions d'un  $G$ -fibré principal à un sous-groupe  $H$  : par le stabilisateur (lemme 1.1.6) et par la section globale de  $P/H$  (cf définition 1.1.3). En effet si  $\rho : G \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{V})$  est un plongement, l'orbite  $\mathcal{O}$  est isomorphe à l'espace homogène  $G/H$  par  $gH \mapsto \rho(g)a$ . Par conséquent les fibrés  $P/H$  et  $P \times_G \mathcal{O}$  sont isomorphes.

### Exemples

- Une réduction à  $O(m)$  du fibré des repères équivaut à la donnée d'un produit scalaire sur chaque espace tangent variant de manière différentiable avec le point ou autrement dit d'un tenseur  $g$ , une section de  $S^2TM$ , telle que  $g_x \in S_x^2TM$  est définie positive quel que soit  $x \in M$ . Un tel tenseur est appelé une *métrique* de la variété  $M$  et une structure  $O(m)$  est appelée une *structure métrique*.

- Le groupe  $G_2$  peut être défini comme le stabilisateur d'une 3-forme  $\rho$  de  $\mathbb{R}^7$  (voir Bryant [11]). Par conséquent, lorsque  $M$  est de dimension 7, une structure  $G_2$  de  $M$  est la donnée d'une 3-forme différentielle ressemblant en tout point à  $\rho$ . Alors il existe une unique métrique  $g$  telle que  $G_2(M) \subset SO(M)$ . De même une structure  $Spin(7)$  en dimension 8 est la donnée d'une 4-forme  $\Omega$  avec certaines propriétés algébriques.

- Lorsque  $G$  est l'intersection des stabilisateurs de 2 objets  $a \in V$  et  $b \in W$ , on peut aussi dire qu'il est le stabilisateur de  $(a, b) \in V \times W$ . La présentation du lemme 1.1.6 vaut encore pour ce cas. L'appartenance de  $(a, b)$  à une orbite déterminée de  $GL(m, \mathbb{R})$  s'interprète alors en partie par des conditions de compatibilité entre  $a$  et  $b$ . On pense à l'exemple de  $U(n)$  ( $m = 2n$ ) qui sera traité au chapitre 3. Une structure  $U(n)$ , ou *structure presque hermitienne*, est définie par la donnée d'une métrique  $g$  et d'une structure presque complexe  $J$  – le choix d'un endomorphisme de carré -1 de chaque espace tangent – qui vérifient  $g(JX, JY) = g(X, Y)$  quels que soient  $X, Y \in TM$ .

Dans l'exposé qui précède on a souhaité être le plus général possible en parlant de fibrés principaux non nécessairement obtenus par réduction du fibré des repères  $GL(M)$ . Cependant il y a des notions et des objets relatifs à ce dernier qui ne sont pas ou mal définis pour un fibré principal général. Par exemple, le fibré tangent étant un fibré associé

de  $GL(M)$ , on peut définir une 1-forme sur celui-ci, à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  :

$$(1.10) \quad X \in T_p P \mapsto \tau(X) = p^{-1}(\pi_* X)$$

Cette 1-forme  $\tau$  est appelée la forme tautologique.

D'autre part le fibré des repères a des sections privilégiées. En effet une carte de la variété  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , où  $U \subset M$  est l'ouvert de carte, induit une section locale

$$(1.11) \quad \begin{aligned} s_\varphi : U &\rightarrow GL(M) \\ x &\mapsto D\varphi(x)^{-1} \end{aligned}$$

NB : dans cette thèse on utilise les deux notations suivant les cas pour la différentielle d'une fonction  $f : M \rightarrow N$  :  $f_* : TM \rightarrow TN$  ou  $Df$  et  $Df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ . Si  $f$  est un difféomorphisme,  $Df(x)$  est inversible quel que soit  $x \in M$ . En outre pour une fonction  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ , on calcule  $Df$  en prenant la dérivée extérieure de chaque fonction coordonnée. On notera donc aussi bien  $df$ .

On appelle *section intégrable* de  $GL(M)$  une section localement issue d'une carte (ou d'un isomorphisme local de  $M$  dans  $\mathbb{R}^m$ ) de la manière (1.11). Elle est caractérisée par

**Lemme 1.1.7.** — *Soit  $s : U \rightarrow GL(M)$  une section locale du fibré des repères. Elle est intégrable si et seulement si  $s^*(d\tau) = 0$*

*Démonstration.* — Pour une section  $s$  quelconque,  $\pi_* \circ s_* = Id$  donc  $\forall X \in T_x M$ ,  $s^* \tau(X) = s(x)^{-1} X$ . Alors pour une section intégrable,  $s = s_\varphi$ , localement,  $s^* \tau(X) = d\varphi(X)$  donc  $s^*(d\tau) = d(s^* \tau) = 0$ .  $\square$

Voici une autre façon de le voir. Si  $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$  sont les coordonnées de la carte,  $x_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s_\varphi$  est le repère local  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\}$ ,  $s^* \tau = (dx_1, \dots, dx_m)$  d'où  $d(s^* \tau) = 0$ .

On peut définir de même les sections intégrables de  $GL(M)/G$ , pour un sous-groupe  $G$  de  $GL(m, \mathbb{R})$ , simplement en passant au quotient.

Maintenant on a une notion plus faible, d'intégrabilité à l'ordre 1, qui appliquée aux  $G$ -structures produira une grande variété de géométries :

**Définition 1.1.8.** — *On dit qu'une section  $s$  de  $GL(M)$  est intégrable à l'ordre 1 (1-plate) en  $x$  si son 1-jet  $j_x^1 s$  coïncide avec le 1-jet d'une section intégrable en ce point.*

D'après le lemme 1.1.7 cela signifie

**Lemme 1.1.9.** — Soit  $s$  une section de  $GL(M)$ . On définit un sous-espace  $D_x = T_x s(M)$  de  $GL_x(M)$ . Alors  $s$  est intégrable à l'ordre 1 en  $x$  si et seulement si  $d\tau|_{\Lambda^2 D_x} = 0$ .

On souhaite maintenant définir des notions d'intégrabilité et d'intégrabilité à l'ordre 1 pour des  $G$ -structures.

**Définition 1.1.10.** — Soit une  $G$ -structure donnée par un sous-fibré principal  $G(M)$  de  $GL(M)$ . Elle est intégrable (plate) si et seulement si il existe localement des sections intégrables à valeurs dans  $G(M)$ . Elle est intégrable à l'ordre 1 si en tout point  $x \in M$  on peut trouver un ouvert  $U$ , contenant  $x$ , et une section  $s_x : U \rightarrow G(M)$ , intégrable à l'ordre 1.

On peut aussi dire que la section globale de  $GL(M)/G$  est intégrable, au sens indiqué plus haut. On voit que le fibré des repères  $GL(M)$  est spécial en ce qu'il est toujours, tautologiquement, intégrable : en tout point de  $GL(M)$  on peut faire passer une section intégrable. Vue la définition de  $s_\varphi$ , on peut alors voir  $GL(M)$  comme le fibré des 1-jets d'isomorphismes locaux de  $M$  dans  $\mathbb{R}^m$ .

En outre, notons que le 1-jet en  $x$  d'une section de  $P$  (en quelque sorte un repère d'ordre 2) peut-être identifié comme en 1.1.9 à un sous-espace horizontal de  $T_x P$  (un sous-espace  $D$  de dimension  $m$  tel que la restriction de  $\pi_*$  soit un isomorphisme.)

On se propose de mesurer le 1-jet d'une  $G$ -structure par référence aux 1-jets des structures intégrables. Pour cela on a besoin d'une notion de connexion.

## 1.2. Connexions et torsion intrinsèque d'une $G$ -structure

Une connexion sur un fibré est un moyen de décrire les 1-jets de ses sections. On note  $\mathcal{J}^k P$ , pour un fibré quelconque  $P$ , l'espace des  $k$ -jets de sections de  $P$ . Pour  $k = 0$ ,  $\mathcal{J}^0 P$  est identifié à  $P$  : soit  $s : U \rightarrow P$  une section locale, son 0-jet en  $x$  est simplement  $s(x)$ . Pour  $k = 1$  on a une fibration

$$\pi^1 : \mathcal{J}^1 P \rightarrow P$$

On identifie le 1-jet de  $s$  au point  $x$  à la différentielle de  $s$  en ce point :

$$j_x^1 s = (s(x), Ds(x))$$

Alors  $\pi^1(j_x^1 s) = s(x)$ .

Pour un fibré  $P$  quelconque, il y a une distribution canoniquement définie, intégrable, donnée par l'espace tangent aux fibres :



**Définition 1.2.1.** — La distribution verticale  $V$  de  $P$  est définie par

$$\forall p \in P, \quad V_p = T_p P_{\pi(p)}$$

Alternativement  $V = \ker \pi_*$ . En passant on donne aussi la

**Définition 1.2.2.** — On appelle sous-espace horizontal de  $TP$  au point  $p$ , un supplémentaire de  $V_p$  dans  $T_p P$ .

Par exemple, l'espace tangent d'une section de  $P$  est un sous-espace horizontal en  $s(x)$  quel que soit  $x \in M$ .

**Lemme 1.2.3.** — Le fibré  $\pi^1 : \mathcal{J}^1 P \rightarrow P$  est un fibré affine modelé sur  $\pi^* T^* M \otimes V$ .

*Démonstration.* — Soient  $s$  et  $s'$  deux sections locales au voisinage de  $x \in M$  telles que  $s(x) = s'(x) = p$ . On pose  $f = Ds(x) - Ds'(x) : T_x M \rightarrow T_p P$ . Alors  $\forall X \in T_x M$ ,  $f(X) \in \ker \pi_*$  car  $\pi_* \circ Ds(x) = \pi_* \circ Ds'(x) = Id|_{T_x M}$  pour deux sections.  $\square$

A partir de là on a une première définition d'une connexion :

**Définition 1.2.4.** — Une connexion est une section  $h$  de  $\pi^1 : \mathcal{J}^1 P \rightarrow P$ .

Cela revient à fixer une origine dans chaque fibre. Dès lors la différence de  $j^1 s$  avec  $h \circ s$  est une section d'un fibré vectoriel sur  $M$  avec laquelle on peut calculer : la dérivée covariante. Avant de l'introduire, on souhaite donner une autre définition d'une connexion. On se souvient qu'on peut voir le 1-jet d'une section  $s$  en  $x$  comme un sous-espace horizontal de  $T_{s(x)} P$ . Par conséquent une connexion assigne à tout point de  $P$  un sous-espace horizontal :

**Définition 1.2.5 (bis).** — Une connexion de  $P$  est une distribution horizontale  $\tilde{H} \subset TP$ .

Autrement dit on demande

$$\forall p \in P, \quad T_p P = V_p \oplus \tilde{H}_p$$

Si  $P$  est un fibré principal de groupe  $G$ , on fait une hypothèse supplémentaire sur  $\tilde{H}$  pour définir une  $G$ -connexion.

**Définition 1.2.6.** — Une  $G$ -connexion sur un fibré principal  $P$  est une distribution horizontale équivariante :

$$(1.12) \quad \forall p \in P, \forall g \in G, \quad \tilde{H}_{pg} = (R_g)_* \tilde{H}_p$$

Il y a encore un troisième point de vue pour les connexions dans le cas des fibrés principaux par la *forme de connexion*.

Soit  $G$  un groupe de Lie. On sait que son fibré tangent est trivial, canoniquement isomorphe à  $G \times \mathfrak{g}$ . L'isomorphisme est donné par la forme de Maurer-Cartan,  $\theta : TG \rightarrow \mathfrak{g}$  :

$$\forall X \in T_g G, \quad \theta(X) = (R_{g^{-1}})_* X$$

en identifiant  $\mathfrak{g}$  à l'espace tangent au point  $e \in G$ . Pour un  $G$ -fibré principal  $P$ , la fibre n'est pas canoniquement isomorphe à  $G$  mais il faut choisir un point  $p$  de  $P_x$ , alors  $P_x \simeq G$  par l'application  $pg \mapsto g$ . Cependant il existe encore une forme de Maurer-Cartan sur  $P_x$ , autrement dit la définition d'une forme sur  $TP_x$ , copiée sur  $\theta$ , ne dépend pas du choix du point base. On note encore  $\theta$  cette forme. Elle est définie sur la distribution verticale. On a donc  $V_p \simeq \mathfrak{g}$  et  $V \simeq P \times \mathfrak{g}$ , par des isomorphismes  $G$ -équivariants. Explicitement, un élément  $a$  de  $\mathfrak{g}$  définit une action

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times P &\rightarrow P \\ (t, p) &\mapsto p \exp(ta) \end{aligned}$$

préservant les fibres. Par conséquent le champ de vecteurs tangents  $X^a$  au flot de cette action est vertical :

$$(1.13) \quad X_p^a = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p \exp(ta) \in V_p$$

Maintenant l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\rightarrow V_p \\ a &\mapsto X_p^a \end{aligned}$$

est l'isomorphisme cherché :  $\theta(X^a) = a$ .

Or la distribution horizontale associée à une connexion permet de compléter  $\theta$  en une 1-forme sur  $P$  en décrétant :

**Définition 1.2.7.** — La 1-forme de connexion  $\omega$  associée à une distribution horizontale  $\tilde{H}$  est définie par

$$\omega|_{\tilde{H}} = 0, \quad \omega|_V = \theta$$

Mais la distribution horizontale  $\tilde{H}$  permet aussi de projeter sur  $V$ . Soit  $s$  une section locale de  $P$ . La différentielle en  $x \in M$  est la somme d'une partie horizontale et d'une partie verticale :

– La partie horizontale ne dépend que du 0-jet de la section en  $x$  et de la connexion. Autrement dit on associe à tout vecteur  $X_p \in T_x M$  et tout point  $p \in P_x$  un vecteur,  $\tilde{X}_p \in \tilde{H}_p$  : le *relevé horizontal* de  $X$  dans  $\tilde{H}_p$ , tel que  $\pi_* \tilde{X} = X$  (car  $s$  est une section.) Le *relèvement horizontal* est donc une scission de la suite exacte courte

$$0 \rightarrow V \rightarrow TP \rightarrow \pi^* TM \rightarrow 0$$

où  $\pi^* TM$  est le fibré induit de  $TM$  par l'application  $\pi : P \rightarrow M$ , défini par  $\forall p \in P$ ,  $(\pi^* TM)_p = T_{\pi(p)} M$ .

– Quant à la partie verticale,

**Définition 1.2.8.** — La dérivée covariante  $\tilde{\nabla}s$  d'une section  $s$  de  $P$  est la partie verticale de sa différentielle  $s_*$  :

$$\forall X \in TM, \quad s_*(X) = \tilde{\nabla}_X s + \tilde{X}_s$$

Soit  $X \in T_x M$ ,  $\tilde{\nabla}_X s \in V_{s(x)}$ . Par conséquent  $\tilde{\nabla}s$  est une section de  $T^*M \otimes s^*V$ , un fibré vectoriel sur  $M$ .

**Définition 1.2.9.** — On dit qu'une section  $s$  de  $P$  est parallèle pour une connexion  $\tilde{H}$  si  $\tilde{\nabla}s = 0$ .

Finalement tous ces points de vue sont équivalents. Pour un fibré principal de groupe  $G$ ,  $V_{s(x)} \simeq \mathfrak{g}$  donc on peut voir  $\tilde{\nabla}s$  comme une 1-forme sur  $M$  à valeur dans  $\mathfrak{g}$  :

$$(1.14) \quad \theta(\tilde{\nabla}s) = s^* \omega$$

La 1-forme  $\omega$  vaut 0 sur  $\tilde{H}_p$  et est un isomorphisme sur  $V_p$ , quel que soit  $p \in P$  : on l'identifie à la projection sur  $V$  parallèlement à  $H$ . Enfin la distribution horizontale est engendrée par le 1-jet des sections parallèles :

$$\tilde{H}_p = \{s_*(T_x M) \mid s : M \rightarrow P, \ s(x) = p, \ (\tilde{\nabla}s)(x) = 0\}$$

Le point de vue de la dérivée covariante est particulièrement pertinent pour un fibré vectoriel  $E$  (pour lequel en revanche, il n'y a pas quelque chose comme la 1-forme de connexion) car dans ce cas le fibré vertical est identifié canoniquement au fibré  $E$  lui-même. Soit  $E \rightarrow M$  un fibré vectoriel,  $\forall x \in M$ ,  $\forall v \in E_x$ , comme  $E_x$  est un espace

vectoriel,  $T_v E_x \simeq E_x$ . Par conséquent  $\forall X \in TM$ ,  $\tilde{\nabla}_X s$  est encore une section de  $E$  si bien qu'on peut par exemple calculer  $\tilde{\nabla}_Y(\tilde{\nabla}_X s)$ , etc.

Mais l'intérêt de regarder les connexions des fibrés principaux, et plus précisément une  $G$ -connexion sur un  $G$ -fibré principal  $P$  est qu'elle induit une connexion sur chaque fibré associé, grâce à l'hypothèse supplémentaire faite en 1.2.6. Pour la construire on a besoin de comprendre l'espace tangent de  $P \times_G \mathcal{V}$ .

L'espace tangent de  $P \times \mathcal{V}$  en un point  $(p, v)$  est bien sûr  $T_p P \oplus T_v \mathcal{V}$ . Mais puisqu'on a quotienté par l'action de  $G$ , toutes les variations dans l'orbite de  $(p, v)$  sont nulles. Celles-ci sont engendrées infinitésimalement par les  $t \rightarrow \exp(ta)(p, v)$ , quel que soit  $a \in \mathfrak{g}$ .

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(ta)(p, v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p \exp(ta) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho(\exp(-ta))v$$

A gauche du signe  $+$  on reconnaît  $X_p^a$ , qu'on identifiera à  $a$  (plus rigoureusement au couple  $(p, a)$ ). Le terme de droite est, par définition,  $-d\rho(a)v \in T_v \mathcal{V}$ . Lorsque  $\mathcal{V}$  est un espace vectoriel,  $d\rho$  coïncide avec la représentation dérivée de  $\rho$  (1.3). Alors on identifie l'espace tangent en  $[p, v]$  au quotient de  $T_p P \oplus T_v \mathcal{V}$  par le sous-espace vectoriel  $\{(a, -d\rho(a)v) \mid a \in \mathfrak{g}\}$  ce qu'on note

$$T_{[p,v]}(P \times_\rho V) = T_p P \oplus_{\mathfrak{g}} T_v \mathcal{V}$$

De plus, un élément de  $T_{[p,v]}(P \times_\rho V)$  représenté par  $a \in \mathfrak{g} \simeq T_p P$  et  $X \in T_v \mathcal{V}$  est noté  $[a + X]$ .

Quel est à présent l'espace vertical ? Soit  $x = \pi(p)$ . Comme le groupe  $G$  agit transitivement sur la fibre de  $P$  contenant  $p$ , lorsque  $u$  décrit  $\mathcal{V}$ ,  $[p, u]$  décrit toute la fibre de  $P \times_G \mathcal{V}$  au dessus de  $x$ . Par conséquent le fibré vertical  $\mathbf{V}$  est canoniquement isomorphe à l'espace tangent à  $\mathcal{V}$  :  $\mathbf{V}_{[p,v]} = \{0\} \oplus_{\mathfrak{g}} T_v \mathcal{V}$ . Mais comme d'autre part en se déplaçant dans la fibre de  $p \in P$ , on reste dans la même fibre de  $P \times_\rho \mathcal{V}$ , on a aussi  $V_p \oplus_{\mathfrak{g}} \{0\} \subset \mathbf{V}_{[p,v]}$ . En effet

$$(1.15) \quad \forall a \in \mathfrak{g}, \quad [a + 0] = [0 + d\rho(a)]$$

Alors

**Définition 1.2.10.** — Soit une  $G$ -connexion sur un fibré principal  $P$  donnée par une distribution horizontale équivariante  $\tilde{H}$ . La connexion induite sur  $P \times_G V$  est donnée par

$$\tilde{\mathbf{H}}_{[p,v]} = H_p \oplus_{\mathfrak{g}} \{0\}$$

On dit que  $\tilde{\mathbf{H}}$  est une  $G$ -connexion sur le fibré associé.

Cette connexion est bien définie grâce à (1.12) :  $\tilde{H}_{pg} = (R_g)_* \tilde{H}_p$  car le sous-espace horizontal ne dépend pas du représentant choisi. Voyons maintenant quelle est la dérivée covariante associée, encore notée  $\tilde{\nabla}$ ,  $\tilde{\nabla}\nu \in T^*M \otimes s_*\mathbf{V}$ . Soient  $\nu = [p, v]$  une section de  $P \times_G V$  et  $X \in T_x M$ ,

$$\nu_*(X) = [p_*(X) + v_*(X)]$$

En projetant sur  $\mathbf{V}$  (en identifiant  $V_{p(x)}$  à  $\mathfrak{g}$ ),

$$\tilde{\nabla}_X \nu = [\omega(p_*(X)) + v_*(X)] = [0 + (d\rho(p^*\omega(X))v + v_*(X))]$$

grâce à (1.15). Pour un fibré vectoriel  $E = P \times_G V$ ,  $\mathbf{V}$  est identifié à  $E$  et on a

**Proposition 1.2.11.** — *Soit  $\omega$  la 1-forme associée à une  $G$ -connexion sur  $P$ . La dérivée covariante de la connexion induite sur  $E = P \times_G V$  est donnée, pour une section  $\nu = [p, v]$  de  $E$ , par*

$$\forall X \in TM, \quad \tilde{\nabla}_X \nu = [p, d\rho(p^*\omega(X))v + X.v]$$

Pour une section locale  $p : U \rightarrow P$ , la 1-forme à valeur dans  $\mathfrak{g}$ ,  $p^*\omega$  est appelée *symbole de Christoffel universel* de la connexion eu égard au fait que toute section  $\nu : U \rightarrow P \times_G V$  peut s'écrire par rapport à ce repère local  $[p, v]$ , pour une section  $v : U \rightarrow V$ .

On peut aussi utiliser, pour définir la connexion induite, l'autre point de vue sur les sections d'un fibré associé  $E = P \times_G V$ , par les fonctions équivariantes  $P \rightarrow V$ . Si  $\boldsymbol{\nu}$  est une telle fonction, la section de  $E$ ,  $\nu = [p, \boldsymbol{\nu}(p)]$  est bien définie. Alors quel que soit le champ de vecteurs  $X \in TM$ , la section  $\tilde{\nabla}_X \nu$  est représentée par la fonction équivariante  $d\boldsymbol{\nu}(\tilde{X})$  :

**Lemme 1.2.12.** — *Si  $\nu = [p, \boldsymbol{\nu}]$  est une section du fibré associé  $E$  de  $P$ , la dérivée covariante est donnée par*

$$(1.16) \quad \tilde{\nabla}_X \nu = [p, d\boldsymbol{\nu}(\tilde{X}_p)]$$

*Démonstration.* — Soit une section  $p$  de  $P$ ,  $\nu(x) = [p(x), \boldsymbol{\nu}(p(x))]$ . On différentie puis on projette sur  $\mathbf{V}$  :

$$\nu_*(X) = [p_*(X) + d\boldsymbol{\nu}(p_*(X))]$$

$$\tilde{\nabla}_X \nu = [\omega(p_*(X)) + d\boldsymbol{\nu}(p_*(X))]$$

On décompose  $p_*(X) = \tilde{\nabla}_X p + \tilde{X}$ .

En dérivant (1.4) on obtient :

$$\forall a \in \mathfrak{g}, \quad d\nu(X^a) = -d\rho(a)\nu$$

d'où, par (1.14)

$$(1.17) \quad d\nu(\tilde{\nabla}_X p) = -d\rho(\theta(\tilde{\nabla}_X p))\nu = -d\rho(\omega(p_* X))\nu$$

Finalement, par (1.15)

$$\tilde{\nabla}_X \nu = [0 + d\nu(\tilde{X})]$$

□

Autrement dit la 1-forme  $\tilde{\nabla}\nu$  à valeurs dans le fibré  $E$  est associée à une 1-forme sur  $P$  à valeurs dans  $V$ .

**Définition 1.2.13.** — Soit  $\beta$  une  $q$ -forme sur  $P$ , à valeurs dans un espace de représentation  $V$  de  $G$ . On dit que  $\beta$  est horizontale si elle vérifie les conditions :

- (i)  $\beta$  est nulle appliquée à un vecteur vertical :  $\forall X \in V, \iota_X \beta = 0$ .
- (ii)  $\beta$  est équivariante :  $R_g^* \beta = \rho(g^{-1})\beta$ .

La 1-forme sur  $P$

$$(1.18) \quad \tilde{d\nu} : X \mapsto d\nu(X^h)$$

où  $\forall X \in TP$ ,  $X^h$  est la projection de  $X$  sur  $\tilde{H}$ , parallèlement à  $V$ , est une 1-forme horizontale.

Plus généralement, avec cette définition, une  $q$ -forme  $\alpha$  sur  $M$  à valeurs dans  $P \times_G V$  correspond à une  $q$ -forme horizontale  $\alpha$  à valeurs dans  $V$ . La correspondance est donnée par

$$\forall p \in P, \forall X_1, \dots, X_q \in T_p P, \quad [p, \alpha(X_1, \dots, X_q)] = \alpha(\pi_* X_1, \dots, \pi_* X_q)$$

et pour toute connexion  $\tilde{H}$ ,

$$\forall x \in M, \forall X_1, \dots, X_q \in T_x M, \forall p \in P_x, \quad [p, \alpha(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q)] = \alpha(X_1, \dots, X_q)$$

Considérons un  $G$ -fibré principal  $P$  et une réduction  $Q$  de  $P$  à  $H$ . Une  $G$ -connexion sur  $P$  induit une  $H$ -connexion sur  $Q$  si le sous-espace horizontal  $\tilde{H}$  est tangent à  $Q$  en tout point de  $Q$  :  $\forall p \in Q, \tilde{H}_p \subset T_p Q$ . De façon équivalente la 1-forme de connexion  $\omega$  restreinte à  $TQ$  est à valeurs dans  $\mathfrak{h}$ . Supposons maintenant que la réduction  $Q$  est définie comme en 1.1.6 par une section  $\alpha$  de  $P \times_\rho V$ . On note  $a \in V$  le tenseur tel que  $H = \text{Stab}_G a$  et  $\alpha = [p, a]$ , quel que soit  $p \in Q$ .

**Proposition 1.2.14.** — Une  $G$ -connexion  $\tilde{\nabla}$  sur  $P$  induit une  $H$ -connexion sur  $Q$  si et seulement si  $\tilde{\nabla}\alpha = 0$ .

*Démonstration.* — Localement on peut écrire  $\alpha = [p, a]$  pour une section  $p$  de  $Q$ . Alors par la proposition 1.2.11,

$$\forall X \in TM, \quad \tilde{\nabla}_X \alpha = [p, d\rho(p^*\omega(X))a]$$

car  $a$  est constante. Par conséquent  $\tilde{\nabla}\alpha = 0$  si et seulement si quel que soit  $X \in TM$ , quelle que soit la section locale  $p$  de  $Q$ ,  $\omega(p_*(X)) \in \mathfrak{h}$ .

Pour le prouver d'une autre façon, on écrit  $\alpha = [p, \alpha(p)]$  pour une fonction  $\alpha : P \rightarrow V$  équivariante valant  $a$  sur  $Q$  (et seulement sur  $Q$ ). Soit  $p \in Q$ ,  $X \in T_p P$  est tangent à  $Q$  si et seulement si  $d\alpha(X) = 0$  par conséquent  $\tilde{\nabla}$  est une  $H$ -connexion si et seulement si

$$\forall p \in Q, \forall X \in T_{\pi(p)}M, \quad d\alpha(\tilde{X}) = 0$$

Cette dernière équation s'étend à  $P$  tout entier, par  $G$ -équivariance. Cela signifie  $\tilde{\nabla}\alpha = 0$  par le lemme 1.2.12.  $\square$

### Exemple

Une connexion  $O(m)$ , ou *connexion métrique*, est une connexion dont la dérivée covariante vérifie  $\tilde{\nabla}g = 0$ .

On peut maintenant donner une condition plus pratique d'intégrabilité d'une  $G$ -structure à l'ordre 1. On se souvient que la définition 1.1.10 de cette dernière propriété faisait intervenir une famille  $(s_x)_{x \in M}$  de section locales de  $P$  telle que  $s_x$  est définie au voisinage de  $x$ . Une telle famille engendre une connexion  $\tilde{H}$ . En effet par équivariance de la distribution horizontale il suffit de fixer  $\tilde{H}_p$  pour un élément  $p$  de chaque fibre. On pose alors

$$\tilde{H}_{s_x(x)} = T_x s_x(M)$$

Réciproquement une connexion définit une famille convenable de sections : pour tout sous-espace horizontal  $\tilde{H}_p \subset T_p P$  on peut trouver une section  $s_{\pi(p)}$  dont il soit le 1-jet. Par conséquent on réécrit 1.1.10, en se servant de 1.1.9 :  $G(M)$  est intégrable à l'ordre 1 si et seulement si il existe une  $G$ -connexion  $\tilde{H}$  telle que  $d\tau|_{\Lambda^2 \tilde{H}} = 0$ . On définit une 2-forme sur  $P$  :

**Définition 1.2.15.** — Soit  $\tilde{H}$  une  $G$ -connexion sur  $P$ . On appelle torsion de  $\tilde{H}$  et on note  $\Theta$  la 2-forme à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  définie par

$$\Theta(X, Y) = d\tau(X^h, Y^h)$$

Finalement

**Proposition 1.2.16.** — Une  $G$ -structure  $G(M)$  est intégrable à l'ordre 1 si et seulement si elle admet une connexion sans torsion, c'est-à-dire telle que  $\Theta = 0$ .

Pour qu'une section  $s : U \rightarrow P$  soit intégrable, il suffit qu'elle soit intégrable à l'ordre 1 en tout point de  $U$  par le lemme 1.1.7, c'est-à-dire qu'elle soit tangente à une distribution horizontale sans torsion.

**Définition 1.2.17.** — La courbure  $\Omega$  de  $\tilde{H}$  est la 2-forme à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  définie par

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X^h, Y^h)$$

**Proposition 1.2.18.** — La distribution  $\tilde{H}$  est intégrable si et seulement si sa courbure est nulle.

**Corollaire 1.2.19.** — Une  $G$ -structure est intégrable si et seulement si elle admet une connexion sans torsion, à courbure nulle :  $\Theta = 0$  et  $\Omega = 0$ .

*Démonstration.* — Par le théorème de Frobenius  $\tilde{H}$  est intégrable si et seulement si, quels que soient les champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  à valeurs dans  $\tilde{H}$ ,  $[X, Y] \in \tilde{H}$ , soit  $\omega([X, Y]) = 0$ . Pour une 1-forme  $\alpha$ ,

$$(1.19) \quad d\alpha(X, Y) = X.\alpha(Y) - Y.\alpha(X) - \alpha([X, Y])$$

Or  $\omega(X) = \omega(Y) = 0$  quels que soient  $X, Y \in \tilde{H}$  par définition de la 1-forme de connexion. D'où

$$(1.20) \quad \omega([X, Y]) = -\Omega(X, Y)$$

Maintenant les variétés intégrales de  $\tilde{H}$  sont les images de sections de  $P$  car  $\tilde{H}$  est horizontale et si elle est sans torsion, ces sections sont intégrables.  $\square$

De la façon dont on les a définies,  $\Theta, \Omega$  sont bien sûr des 2-formes horizontales. Elles correspondent par conséquent à des 2-formes sur  $M$  : on retrouve de cette façon les définitions usuelles de la torsion et de la courbure par la dérivée covariante.



**Proposition 1.2.20.** — La 2-forme horizontale  $\Theta$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  est associée à la 2-forme  $T$  à valeurs dans le fibré tangent  $TM$  définie par

$$(1.21) \quad T(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X, Y]$$

La 2-forme horizontale  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  est associée à  $\tilde{R}$ , à valeurs dans le fibré adjoint  $\mathfrak{g}(M)$ , définie par

$$(1.22) \quad \tilde{R}_{X,Y} = [\tilde{\nabla}_X, \tilde{\nabla}_Y] - \tilde{\nabla}_{[X,Y]}$$

où le premier crochet désigne le commutateur :  $[\tilde{\nabla}_X, \tilde{\nabla}_Y] = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X$ . Les tenseurs  $T$  et  $\tilde{R}$  sont aussi appelés respectivement la torsion et la courbure de  $\tilde{\nabla}$ .

*Démonstration.* — Pour la torsion. La 1-forme  $\tau$  est horizontale par définition (1.10). Elle correspond simplement à l'identité de  $TM$ . Par conséquent la fonction  $p \mapsto \tau(\tilde{X}_p)$  est associée au champ de tenseurs  $X$  et  $\tilde{X}.\tau(\tilde{Y})$  est associée à  $\tilde{\nabla}_X Y$  par le lemme 1.2.12. Maintenant

$$\Theta(\tilde{X}, \tilde{Y}) = d\tau(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{X}.\tau(\tilde{Y}) - \tilde{Y}.\tau(\tilde{X}) - \tau([\tilde{X}, \tilde{Y}])$$

Pour des champs de vecteurs projetables  $X, Y$  de  $P$ ,  $\pi_*[X, Y] = [\pi_*X, \pi_*Y]$  donc la partie horizontale de  $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$  est  $\widetilde{[X, Y]}$  et  $\tau([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = \tau(\widetilde{[X, Y]})$ . Finalement le tenseur  $T$  associé à  $\Theta$  est bien

$$T(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X, Y]$$

Pour la courbure. On calcule  $\tilde{R} \in \mathfrak{g}(M)$  via son action sur les fibrés associés. Soit  $\nu$  une fonction équivariante de  $P$  dans  $V$  représentant une section  $\nu : M \rightarrow P \times_G V$ . La dérivée covariante  $\tilde{\nabla}\nu$  est représentée par  $\widetilde{d\nu}$  définie en (1.18).

$$0 = d^2\nu(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{X}.d\nu(\tilde{Y}) - \tilde{Y}.d\nu(\tilde{X}) - d\nu([\tilde{X}, \tilde{Y}])$$

On décompose  $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$  suivant  $H \oplus V$  :

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]} + [\tilde{X}, \tilde{Y}]^v$$

d'où

$$d\nu([\tilde{X}, \tilde{Y}]^v) = \tilde{X}.\widetilde{d\nu}(\tilde{Y}) - \tilde{Y}.\widetilde{d\nu}(\tilde{X}) - \widetilde{d\nu}(\widetilde{[X, Y]})$$

Par (1.17), (1.20),

$$d\nu([\tilde{X}, \tilde{Y}]^v) = -d\rho(\omega[\tilde{X}, \tilde{Y}])\nu = d\rho(\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}))\nu$$

et par définition de l'action du fibré adjoint (1.6),

$$\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}).\nu = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \nu - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \nu - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} \nu$$

□

La différence de deux connexions, données par leurs 1-formes  $\omega, \omega'$ ,

$$\boldsymbol{\eta} = \omega' - \omega$$

est une 1-forme horizontale, à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  car  $\omega|_V = \omega'|_V = \theta$ . Elle représente donc un tenseur

$$(1.23) \quad \eta = \widehat{\nabla} - \widetilde{\nabla} \in T^*M \otimes \mathfrak{g}(M)$$

où  $\widehat{\nabla}$  est la dérivée covariante de  $\omega'$ .

De plus, soit  $\widetilde{\nabla}$  une  $G$ -connexion, il n'est pas difficile de vérifier réciproquement que quel que soit le tenseur  $\eta \in \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}(M)$ ,  $\widehat{\nabla} = \widetilde{\nabla} + \eta$  est encore la dérivée covariante d'une  $G$ -connexion sur  $G(M)$ . Ce n'est rien d'autre que 1.2.3 dans le contexte des fibrés principaux. La différence des torsions est alors bien sûr

$$(1.24) \quad (T' - T)(X, Y) = \eta_X Y - \eta_Y X = (\mathfrak{d}\eta)_X Y$$

où

$$\mathfrak{d} : \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}(M) \rightarrow \Lambda^2 \otimes TM$$

On peut alors quotienter par l'image de  $\mathfrak{d}$  :

**Définition 1.2.21.** — Soit une  $G$ -connexion  $\widetilde{\nabla}$ , de torsion  $T$ , sur  $G(M)$ . La classe d'équivalence  $T_0(G)$  de  $T$  dans  $\Lambda^2 \otimes TM / \mathfrak{d}(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}(M))$  ne dépend pas de la connexion choisie, par (1.24). Elle est appelée torsion intrinsèque de la  $G$ -structure  $G(M)$ .

Maintenant il existe une connexion sans torsion si et seulement si, pour toute connexion,  $T$  est dans l'image de  $\mathfrak{d}$  :

**Proposition 1.2.22.** — Une  $G$ -structure  $G(M)$  est intégrable à l'ordre 1 si et seulement si sa torsion intrinsèque  $T_0(G)$  est nulle.

On peut voir la torsion intrinsèque comme le 1-jet de la  $G$ -structure.

L'exemple fondamental est  $G = O(m)$ . Dans ce cas

$$\mathfrak{d} : \Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(M) \rightarrow \Lambda^2 \otimes TM$$

est un isomorphisme, par conséquent

**Proposition et définition 1.2.23.** — *Toute structure  $O(m)$  est intégrable à l'ordre 1 et admet une unique connexion métrique, sans torsion : la connexion de Levi-Civita, notée  $\nabla$ , de la métrique  $g$ .*

Pour une autre connexion métrique  $\tilde{\nabla}$ , on pose  $\tilde{\eta} = \nabla - \tilde{\nabla}$  de sorte que

$$\mathfrak{d}\tilde{\eta} = T$$

et réciproquement  $\tilde{\eta} = \mathfrak{d}^{-1}T$  c'est-à-dire

$$g(\tilde{\eta}_X Y, Z) = -\frac{1}{2}(g(T(X, Y), Z) + g(T(Z, Y), X) + g(T(Z, X), Y))$$

Par abus de langage on appellera aussi  $\tilde{\eta}$  la torsion de  $\tilde{\nabla}$ .

Si  $G$  est compact  $G \subset SO(m)$  et  $G(M)$  est une réduction à  $G$  de  $SO(M)$ , une  $G$ -connexion  $\tilde{\nabla}$  sur  $G(M)$  s'étend en une connexion métrique. Soit  $\mathfrak{g}^\perp$  l'orthogonal de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{so}(m)$ . On note  $\mathfrak{g}^\perp(M)$  le fibré associé de  $G(M)$ .

$$(1.25) \quad \Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(m) = \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}(M) \oplus \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}^\perp(M)$$

par conséquent

$$(1.26) \quad \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}^\perp(M) \simeq \frac{\Lambda^2 \otimes TM}{\mathfrak{d}(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}(M))}$$

La partie de  $\tilde{\eta}$  dans  $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}^\perp(M)$ , appelée  $\bar{\eta}$ , ne dépend pas de la  $G$ -connexion  $\tilde{\nabla}$ . En effet si  $\tilde{\nabla}, \hat{\nabla}$  sont deux  $G$ -connexions leur différence vérifie (1.23). On définit une connexion métrique  $\bar{\nabla}$  par

$$\bar{\nabla} = \nabla - \bar{\eta}$$

C'est une  $G$ -connexion. En effet  $\bar{\nabla} = \tilde{\nabla} + (\tilde{\eta} - \bar{\eta})$  où  $\tilde{\eta} - \bar{\eta} \in \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}(M)$ .

**Définition 1.2.24.** — *La connexion  $\bar{\nabla}$  est appelée connexion intrinsèque (ou  $G$ -connexion canonique) de  $G(M)$ . Le tenseur  $\bar{\eta} = \nabla - \bar{\nabla}$  est la torsion intrinsèque de  $G(M)$ .*

En effet,  $\bar{\eta}$  est identifiée à  $T_0(G)$  par (1.26).

Finalement, pour toute  $G$ -connexion  $\tilde{\nabla}$ ,

$$(1.27) \quad \begin{aligned} \nabla - \tilde{\nabla} &= \nabla - \bar{\nabla} + \bar{\nabla} - \tilde{\nabla} \\ \Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(M) &= \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}(M)^\perp \oplus \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}(M) \end{aligned}$$

La connexion intrinsèque peut être définie plus directement par sa 1-forme de connexion, en demandant que  $\bar{\omega}$  soit la projection dans  $\mathfrak{g}$  de  $\omega_{LC}$ , la 1-forme de connexion de la connexion de Levi-Civita, à valeurs dans  $\mathfrak{so}(m)$ .

On se place maintenant dans la situation de la proposition 1.1.6 :  $H \subset G$  est le stabilisateur d'un tenseur  $a \in V$ , on suppose que  $G(M)$  admet une réduction  $H(M)$ , définie via un champ de tenseurs  $\alpha \in V(M)$  ressemblant en tout point à  $a$ . Alors par la proposition 1.2.14,

**Proposition 1.2.25.** —  *$H(M)$  est intégrable à l'ordre 1 si et seulement si  $\nabla\alpha = 0$  pour une  $G$ -connexion  $\nabla$  sans torsion.*

**Corollaire 1.2.26.** — *Soit  $G(M)$  une réduction de  $SO(M)$  où  $G = \text{Stab}_{SO(m)}a$ . Elle est intégrable à l'ordre 1 si et seulement si  $\nabla\alpha = 0$ , où  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita.*

L'action du fibré adjoint  $\mathfrak{so}(M)$  sur  $V(M)$  induit une action de  $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(M)$  sur  $V(M)$ , à valeurs dans  $\Lambda^1 \otimes V(M)$ . Soit  $\nu \in V(M)$ ,  $\eta \in \Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(M)$ , on note  $\eta.\nu$  la contraction de  $\eta \otimes \nu$  :

$$(\eta.\nu)_X = \eta_X.\nu$$

Cette action peut-être explicitée pour un tenseur  $p$ -fois covariant (voir (1.8)) :

$$(\eta.\nu)_X(X_1, \dots, X_p) = -\nu(\eta_X X_1, \dots, X_p) - \dots - \nu(X_1, \dots, \eta_X X_p)$$

Pour toute  $G$ -connexion  $\tilde{\nabla}$  (et  $\nabla$  la connexion de Levi Civita),

$$\tilde{\eta}.\alpha = \nabla\alpha - \tilde{\nabla}\alpha = \nabla\alpha$$

Le noyau de

$$\begin{aligned} \Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(M) &\rightarrow \Lambda^1 \otimes V(M) \\ \eta &\mapsto \eta.\alpha \end{aligned}$$

est  $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}(M)$  donc la restriction à  $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}^\perp$  est injective et  $\nabla\alpha$  est identifiée à la torsion intrinsèque  $\bar{\eta}$ , ce qui est une autre explication du corollaire 1.2.26.

**Remarque 1.2.27.** — *Par le corollaire 1.2.26, la notion d'intégrabilité à l'ordre 1 rejoint la notion d'holonomie : une  $G$ -structure,  $G \subset SO(m)$  est intégrable à l'ordre 1 si et seulement si l'holonomie riemannienne de  $(M, g)$  est contenue dans le groupe  $G$ . En effet le groupe d'holonomie d'une  $G$ -connexion est bien sûr inclus dans  $G$ .*

Il existe un lien entre la courbure d'une connexion et sa torsion exprimé par deux équations, les identités de Bianchi, obtenues en calculant la différentielle extérieure de  $\Theta$ ,  $\Omega$  (voir [38], p121 ou p135 pour une preuve). Exprimées en termes des tenseurs sur la base  $T, \tilde{R}$ ,

**Proposition 1.2.28.** — Soit  $T, \tilde{R}$  la torsion et la courbure d'une connexion linéaire (une  $GL(m, \mathbb{R})$ -connexion)  $\tilde{\nabla}$ . On a la première identité de Bianchi :

$$(1.28) \quad \mathfrak{S}\{\tilde{R}_{X,Y}Z\} = \mathfrak{S}\{T(T(X,Y), Z) + (\tilde{\nabla}_X T)(Y, Z)\}$$

où  $\mathfrak{S}$  désigne la permutation circulaire sur  $X, Y, Z$ , et la deuxième identité de Bianchi :

$$(1.29) \quad \mathfrak{S}\{(\tilde{\nabla}_X \tilde{R})_{Y,Z} + \tilde{R}_{T(X,Y),Z}\} = 0$$

On va voir une expression plus commode plus loin de ces identités lorsque  $\tilde{\nabla}$  est une connexion métrique, en utilisant  $\tilde{\eta}$  au lieu de  $T$ . Ce qui nous intéresse pour l'instant sont les connexions sans torsion. On définit l'opérateur de Bianchi :

$$b : \Lambda^2 \otimes \Lambda^1 \otimes TM \rightarrow \Lambda^3 \otimes TM$$

par

$$b(\alpha)(X, Y, Z) = \mathfrak{S}\{\alpha(X, Y, Z)\} = \alpha(X, Y, Z) + \alpha(Y, Z, X) + \alpha(Z, X, Y)$$

Alors, pour une connexion  $\nabla$  sans torsion, de tenseur de courbure  $R$ , (1.28) devient simplement  $b(R) = 0$ , c'est-à-dire

$$(1.30) \quad \forall X, Y, Z \in TM, \quad R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y = 0$$

**Définition 1.2.29.** — On appelle espace des tenseurs de courbure algébriques à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  le sous-espace

$$\mathcal{K}(\mathfrak{g}) = \ker b \cap \Lambda^2 \otimes \mathfrak{g}$$

**Lemme 1.2.30.** — Soit  $\nabla$  une  $G$ -connexion sans torsion. Sa courbure  $R$  appartient à  $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ .

Lorsque  $G \subset SO(m)$ ,  $\nabla$  ne peut être que la connexion de Levi-Civita. Par conséquent d'après une remarque précédente 1.2.27, ou plus profondément d'après le théorème d'Ambrose-Singer [2],  $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$  est l'espace abstrait des tenseurs de courbure riemannienne des métriques à holonomie contenue dans  $G$ .

On peut préciser la place de  $\mathcal{K}(\mathfrak{so}(m))$  dans  $\Lambda^2 \otimes \mathfrak{so}(M)$ . Soit  $b'$  l'antisymétrisation sur les 4 variables de  $\Lambda^2 \otimes \Lambda^2$  :

$$(1.31) \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2, \quad b'(\alpha \otimes \beta) = \alpha \wedge \beta$$

Son image est évidemment  $\Lambda^4$ . Alors

**Proposition 1.2.31.** — *Soit  $M$  une variété riemannienne. L'espace des tenseurs de courbure riemannienne algébriques,  $\mathcal{K}(\mathfrak{so}(m))$ , est un sous-espace du produit symétrique  $\odot^2(\Lambda^2)$ , en identifiant  $\Lambda^2 \otimes \mathfrak{so}(M)$  à  $\Lambda^2 \otimes \Lambda^2$  via la métrique. Plus précisément*

$$(1.32) \quad \mathcal{K}(\mathfrak{so}(m)) = \ker b' \cap \odot^2(\Lambda^2)$$

alors

$$(1.33) \quad \Lambda^2 \otimes \Lambda^2 = \bigwedge^2(\Lambda^2) \oplus \Lambda^4 \oplus \mathcal{K}(\mathfrak{so}(m))$$

*Démonstration.* — On commence par décomposer  $\Lambda^2 \otimes \Lambda^2$  en la somme directe du produit antisymétrique et du produit symétrique :

$$\Lambda^2 \otimes \Lambda^2 = \bigwedge^2(\Lambda^2) \oplus \odot^2(\Lambda^2)$$

Or l'opérateur de Bianchi  $b$  est injectif sur le premier sous-espace. Soit  $\alpha \in \bigwedge^2(\Lambda^2)$  tel que  $b(\alpha) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z, T) &= -\alpha(Y, Z, X, T) - \alpha(Z, X, Y, T) \\ &= \alpha(X, T, Y, Z) - \alpha(Y, T, X, Z) \\ &= \alpha(X, T, Y, Z) + \alpha(T, X, Y, Z) + \alpha(X, Y, T, Z) \\ &= -\alpha(X, Y, Z, T) \end{aligned}$$

d'où  $\alpha = 0$ . Cela démontre la première assertion.

Deuxièmement, le produit symétrique  $\odot^2(\Lambda^2)$  contient  $\Lambda^4$ . Soit  $\alpha \in \Lambda^4$ , on a évidemment  $b(\alpha) = 3\alpha$ . Donc l'opérateur de Bianchi est injectif sur ce sous-espace. Finalement

$$b : \bigwedge^2(\Lambda^2) \oplus \Lambda^4 \rightarrow \Lambda^3 \otimes \Lambda^1$$

est injectif.

D'autre part, soit  $a$  l'antisymétrisation suivant les deux premières variables :

$$a : \Lambda^1 \otimes \Lambda^1 \otimes \Lambda^1 \otimes TM \rightarrow \Lambda^2 \otimes \Lambda^1 \otimes TM$$

$$a(\beta)_{X,Y} = \beta_{X,Y} - \beta_{Y,X}$$

Montrons que sa restriction  $a : \Lambda^1 \otimes \Lambda^3 \rightarrow \Lambda^2 \otimes \Lambda^2$  est injective et que son image est contenue dans  $\bigwedge^2(\Lambda^2) \oplus \Lambda^4$ .

– Elle est injective. Soit  $\beta \in \Lambda^1 \otimes \Lambda^3$  tel que  $a(\beta) = 0$ . En utilisant tour à tour la symétrie sur les deux premières variables et l'antisymétrie sur les trois dernières variables :

$$\begin{aligned}
\beta(X, Y, Z, T) &= \beta(Y, X, Z, T) \\
&= \beta(Y, Z, T, X) \\
&= \beta(Z, Y, T, X) \\
&= \beta(Z, X, Y, T) \\
&= \beta(X, Z, Y, T) = -\beta(X, Y, Z, T)
\end{aligned}$$

d'où  $\beta = 0$ .

– Son image est contenue dans  $\bigwedge^2(\Lambda^2) \oplus \Lambda^4$ . On souhaite décomposer  $\Lambda^1 \otimes \Lambda^3$ . Pour cela on introduit  $c$  :

$$(1.34) \quad c(\beta)(X, Y, Z, T) = \beta(X, Y, Z, T) - \beta(Y, Z, T, X) + \beta(Z, T, X, Y) - \beta(T, X, Y, Z)$$

soit

$$\forall \sigma \in \Lambda^1, \forall \alpha \in \Lambda^3, \quad c(\sigma \otimes \alpha) = \sigma \wedge \alpha$$

L'image de  $c$  est  $\Lambda^4$ . De plus, quel que soit  $\alpha \in \Lambda^4$ ,  $c(\alpha) = 4\alpha$  d'où

$$\Lambda^1 \otimes \Lambda^3 = \Lambda^4 \oplus \ker c$$

Soit  $\beta \in \Lambda^1 \otimes \Lambda^3$ ,  $a(\beta) \in \bigwedge^2(\Lambda^2)$  si et seulement si, pour tous  $X, Y, Z, T \in TM$

$$\begin{aligned}
a(\beta)(X, Y, Z, T) &= -a(\beta)(Z, T, X, Y) \\
\iff \beta(X, Y, Z, T) - \beta(Y, X, Z, T) &= -\beta(Z, T, X, Y) + \beta(T, Z, X, Y) \\
\iff \beta(X, Y, Z, T) - \beta(Y, Z, T, X) + \beta(Z, T, X, Y) - \beta(T, X, Y, Z) &= 0
\end{aligned}$$

i.e. si et seulement si  $c(\beta) = 0$  par conséquent  $a(\ker c) \subset \bigwedge^2(\Lambda^2)$ . Bien sûr, quel que soit  $\beta \in \Lambda^4$ ,  $a(\beta) = 2\beta$  d'où  $a(\Lambda^4) = \Lambda^4$ .

Finalement on a démontré :

**Lemme 1.2.32.** — *Les applications*

$$\Lambda^1 \otimes \Lambda^3 \xrightarrow{a} \bigwedge^2(\Lambda^2) \oplus \Lambda^4 \xrightarrow{b} \Lambda^3 \otimes \Lambda^1$$

*sont des isomorphismes.*

On en déduit que  $\ker b$  et  $\bigwedge^2(\Lambda^2) \oplus \Lambda^4 \subset \Lambda^2 \otimes \Lambda^2$  sont supplémentaires et

$$\odot^2(\Lambda^2) = \ker b \oplus \Lambda^4$$

D'autre part quel que soit  $\alpha \in \Lambda^4$ ,  $b'(\alpha) = 4\alpha$  où  $b'$  est défini par (1.31) donc la restriction de  $b'$  à  $\Lambda^4$  est un isomorphisme. Comme  $b, b'$  sont tous deux  $GL(m, \mathbb{R})$ -invariants, on a (1.32). Cela termine la preuve de la proposition.  $\square$

Il y a une contraction évidente,  $tr$  sur  $\Lambda^2 \otimes \Lambda^2$  donnée par :

$$(1.35) \quad tr(\alpha)(X, Y) = \sum_{i=1}^m \alpha(e_i, X, Y, e_i)$$

**Définition 1.2.33.** — La contraction de Ricci, notée  $ric$ , est la restriction de la contraction  $tr$  à  $\odot^2(\Lambda^2)$ . Pour une variété riemannienne, de courbure riemannienne  $R$ , on pose  $Ric = ric(R)$  le tenseur de Ricci.

L'image de  $ric$  est  $\Sigma^2 = \odot^2(\Lambda^1)$  qui se décompose en

$$\Sigma^2 = \Sigma_0^2 \oplus \mathbb{R}g$$

où  $g$  est la métrique. De plus, vu la définition (1.35),  $ric(\alpha) = 0$  évidemment quel que soit  $\alpha \in \Lambda^4$  donc il existe un sous-espace  $W$  de  $\mathcal{K}(\mathfrak{so}(m))$  tel que

$$\ker ric = W \oplus \Lambda^4$$

On a alors le résultat bien connu (voir par exemple [9], p47) :

**Proposition 1.2.34.** — Soit  $M$  une variété riemannienne.

$$\mathcal{K}(\mathfrak{so}(m)) \simeq W \oplus \Sigma_0^2 \oplus \mathbb{R}$$

est la décomposition irréductible en chaque point de  $\mathcal{K}(\mathfrak{so}(m))$  sous l'action de  $O(m)$ .

**Définition 1.2.35.** — Soit  $M$  une variété riemannienne. La composante de  $R$  dans  $W$  est appelée le tenseur de Weyl de  $M$ . De plus on note  $Ric_0$  la composante de  $Ric$  dans  $\Sigma_0^2$ . Enfin la fonction  $s$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$Ric = Ric_0 + sg$$

est appelée la courbure scalaire de  $M$ .

**Définition 1.2.36.** — Une variété  $M$  est dite d'Einstein si  $R \in W \oplus \mathbb{R}$  i.e.  $Ric_0 = 0$ ,

$$Ric = sg$$

Dans ce cas la courbure scalaire  $s$  est constante. C'est une conséquence de la seconde identité de Bianchi (1.29).

Enfin notons que l'image de  $tr$  restreinte cette fois à  $\bigwedge^2(\Lambda^2)$  est  $\Lambda^2$ . Soit  $V$  son noyau.

$$(1.36) \quad \Lambda^1 \otimes \Lambda^3 = \Lambda^2 \oplus V \oplus \Lambda^4$$

par le lemme 1.2.32 et on peut montrer que cette décomposition est irréductible sous l'action de  $O(m)$ .



Soient  $\tilde{\nabla}, \hat{\nabla}$  deux connexions sur  $M$ , de différence  $\eta = \hat{\nabla} - \tilde{\nabla}$  et de courbures respectives  $\tilde{R}$  et  $\hat{R}$ . Soit  $T$  la torsion de  $\tilde{\nabla}$ . Par (1.21), (1.22),

$$\begin{aligned}\hat{R}_{X,Y} &= [\hat{\nabla}_X, \hat{\nabla}_Y] - \hat{\nabla}_{[X,Y]} \\ &= [\tilde{\nabla}_X, \tilde{\nabla}_Y] + [\tilde{\nabla}_X, \eta_Y] + [\eta_X, \tilde{\nabla}_Y] + [\eta_X, \eta_Y] - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} - \eta_{[X,Y]} \\ &= [\tilde{\nabla}_X, \tilde{\nabla}_Y] - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} + [\tilde{\nabla}_X, \eta_Y] - \eta_{\tilde{\nabla}_X Y} - [\tilde{\nabla}_Y, \tilde{\eta}_X] + \eta_{\tilde{\nabla}_Y X} + \eta_{T(X,Y)} + [\eta_X, \eta_Y] \\ &= \tilde{R}_{X,Y} + (\tilde{\nabla}_X \eta)_Y - (\tilde{\nabla}_Y \eta)_X + \eta_{T(X,Y)} + [\eta_X, \eta_Y]\end{aligned}$$

$$\text{car } (\tilde{\nabla}_X \tilde{\eta})_Y = \tilde{\nabla}_X \tilde{\eta}_Y - \tilde{\eta}_{\tilde{\nabla}_X Y} = [\tilde{\nabla}_X, \tilde{\eta}_Y] - \tilde{\eta}_{\tilde{\nabla}_X Y}.$$

Lorsque  $\hat{\nabla} = \nabla$ , la connexion de Levi-Civita,  $\eta = \tilde{\eta} = \nabla - \tilde{\nabla}$  et  $T(X, Y) = -\tilde{\eta}_X Y + \tilde{\eta}_Y X$  car  $\nabla$  est sans torsion. On remarque

$$(\tilde{\eta} \cdot \tilde{\eta})_{X,Y} = -\tilde{\eta}_{\tilde{\eta}_X Y} + [\tilde{\eta}_X, \tilde{\eta}_Y]$$

Alors l'équation devient

$$(1.37) \quad R = \tilde{R} + a(\tilde{\nabla} \tilde{\eta}) + a(\tilde{\eta} \cdot \tilde{\eta}) - [\tilde{\eta}, \tilde{\eta}]$$

ou en inversant le rôle de  $\nabla$  et  $\tilde{\nabla}$ ,

$$(1.38) \quad R = \tilde{R} + a(\nabla \tilde{\eta}) - [\tilde{\eta}, \tilde{\eta}]$$

Si on applique maintenant l'opérateur de Bianchi à (1.37) on trouve

$$(1.39) \quad b(\tilde{R}) = b([\tilde{\eta}, \tilde{\eta}] - a(\tilde{\eta} \cdot \tilde{\eta} + \tilde{\nabla} \tilde{\eta}))$$

qui n'est rien d'autre que la première identité de Bianchi (1.28) dans le contexte des connexions métriques. On l'interprète ainsi : l'image de  $\tilde{R}$  par  $b$  ne dépend que de la torsion  $\tilde{\eta}$  et sa dérivée covariante pour  $\tilde{\nabla}$ . On décompose  $\Lambda^2 \otimes \mathfrak{g}$  :

$$\Lambda^2 \otimes \mathfrak{g} = \mathcal{K}(\mathfrak{g}) \oplus \mathcal{K}(\mathfrak{g})^\perp$$

Suivant cette somme directe, la courbure de  $\tilde{\nabla}$  s'écrit

$$(1.40) \quad \tilde{R} = \tilde{R}_0 + \tilde{R}^\perp$$

où  $\tilde{R}^\perp$  ne dépend que de  $\tilde{\eta}, \tilde{\nabla} \tilde{\eta}$  par (1.39), car la restriction de  $b$  à  $\mathcal{K}(\mathfrak{g})^\perp$  est injective. En particulier, en prenant  $\tilde{\nabla} = \bar{\nabla}$  la torsion intrinsèque,

**Lemme 1.2.37.** — *Si  $SO(M)$  admet une réduction à  $G$ , la courbure riemannienne est déterminée, modulo un tenseur de courbure algébrique à valeur dans  $\mathfrak{g}$ , par la courbure intrinsèque  $\bar{\eta}$  de  $G(M)$  et sa dérivée covariante par  $\bar{\nabla}$  :*

$$(1.41) \quad R = \bar{R}_0 + b^\perp([\bar{\eta}, \bar{\eta}] - a(\bar{\eta} \cdot \bar{\eta} + \bar{\nabla} \bar{\eta}))$$

où  $\bar{R}_0 \in \mathcal{K}(\mathfrak{g})$ .

### 1.3. Espaces homogènes

Les espaces homogènes donnent des exemples de  $G$ -structures, lorsque le groupe d'isotropie est inclus dans  $G$ .

**Définition 1.3.1.** — *Un espace homogène est le quotient à droite  $M = G/H$  d'un groupe de Lie connexe  $G$  par un sous-groupe fermé  $H$ . Sous ces hypothèses,  $M$  est une variété différentiable.*

Alors, quasiment par définition,

**Proposition 1.3.2.** — *Si  $M = G/H$  est un espace homogène,  $G$  muni de la projection canonique  $\pi : G \rightarrow G/H$  est un fibré principal sur  $M$ , de groupe  $H$ .*

(il faut seulement démontrer qu'il est localement trivial).

Par ailleurs, outre l'action à droite de  $G$  sur lui-même qui permet de définir le fibré principal et l'espace homogène, en même temps, il y a une action ou une multiplication à gauche, qui passe au quotient :  $G$  agit sur  $M$  par

$$(1.42) \quad \forall g, g' \in G, \quad g'\pi(g) = \pi(g'g)$$

en notant de la même façon  $g$  un élément du groupe et l'application de  $M$  dans  $M$  ainsi définie. On peut montrer que cette application est un difféomorphisme. On note  $g_*$  la différentielle. Soit  $o = \pi(e)$  le *point distingué* de  $M$ . Le groupe d'isotropie de cette action en  $o$  est  $H$ . Plus généralement, soit  $x = \pi(g)$ , on vérifie facilement que le groupe d'isotropie en  $x$  est le sous-groupe conjugué de  $H$ ,  $gHg^{-1}$ .

L'action à droite de  $H$  sur  $G$  définit des vecteurs verticaux distingués  $X^a$ ,  $a \in \mathfrak{h}$ , comme sur toute fibration principale (1.13), coïncidant avec les champs de vecteurs invariants à

gauche  $a^L$  de  $G$ . L'action à gauche de  $G$  sur  $M$  induit des champs de vecteurs sur  $M$ , notés  $a^K$ ,  $a \in \mathfrak{g}$  :

$$\forall x \in M, \quad a_x^K = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(ta)x$$

Par anticipation, les champs de vecteurs  $a^K$  sont appelés les *champs de Killing* de  $M$ . Ce sont les projections sur  $M$  des champs de vecteurs invariants à droite  $a^R$  sur le groupe  $G$ . En effet, soit  $a \in \mathfrak{g}$ ,  $\pi(\exp(ta)g) = \exp(ta)\pi(g)$  par définition (1.42). En dérivant par rapport à  $t$ ,

$$(1.43) \quad \pi_*(a_g^R) = a_{\pi(g)}^K$$

L'action de  $G$  sur  $M$  est évidemment transitive. On demande souvent, pour définir un espace homogène, qu'elle soit en outre effective c'est-à-dire que l'homomorphisme  $G \rightarrow \text{Diff}(M)$  qu'elle induit soit injectif. Il nous suffit de le supposer, quitte à quotienter par le noyau  $N$  de cet homomorphisme (i.e. à substituer la paire  $(G/N, H/N)$  à  $(G, H)$  : l'espace homogène est le même.)

Maintenant on fait une hypothèse supplémentaire sur l'espace homogène :

**Définition 1.3.3.** — *L'espace homogène  $M = G/H$  est dit réductif si  $\mathfrak{h}$  admet un supplémentaire  $\text{Ad}(H)$ -invariant dans  $\mathfrak{g}$  :*

$$(1.44) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \forall h \in H, \quad \text{Ad}_h \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$$

Pour un vecteur  $a \in \mathfrak{g}$  on note  $a^{\mathfrak{h}}$ , resp.  $a^{\mathfrak{m}}$ , les projections de  $a$  sur  $\mathfrak{h}$ , resp.  $\mathfrak{m}$ , conformément à (1.44).

L'espace vectoriel  $\mathfrak{m}$  est alors un espace de représentation de  $H$ , pour la restriction de  $\text{Ad}$ , et on peut construire le fibré associé :

**Lemme 1.3.4.** — *Soit  $M = G/H$  un espace homogène réductif :  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ . Le fibré  $\mathfrak{m}(M) = G \times_H \mathfrak{m}$  est canoniquement isomorphe au fibré tangent.*

*Démonstration.* — En identifiant  $\mathfrak{g}$  à  $T_e G$ ,  $\mathfrak{h} = T_e H = \ker \pi_*$  et  $\pi_*$  induit un isomorphisme  $\mathfrak{m} \simeq T_o M$ . De plus cet isomorphisme est  $H$ -équivariant :

$$\forall h \in H, \forall v \in \mathfrak{m}, \quad \pi_*(\text{Ad}_h v) = h_* \pi_*(v)$$

Il suffit pour l'obtenir de dériver  $\pi(h \exp(tv) h^{-1}) = h \pi(\exp(tv))$ . Alors l'application

$$(1.45) \quad \begin{aligned} \mathfrak{m}(M) &\rightarrow TM \\ [g, v] &\mapsto g_* \pi_*(v) = v_{\pi(g)}^K \end{aligned}$$

est bien définie et est un isomorphisme.  $\square$

Autrement dit, de même que l'algèbre de Lie d'un groupe  $\mathfrak{g}$  peut-être définie comme l'algèbre des champs de vecteurs invariants à droite sur  $G$  en identifiant  $a$  et  $a^R$ ,  $\mathfrak{m}$  est identifié à l'espace des champs de vecteurs de Killing, soit  $v \in \mathfrak{m}$  à  $v^K$ . Or, pour un espace homogène, les champs de vecteurs de Killing engendrent l'espace tangent en chaque point.

Grâce au lemme 1.3.4 on peut voir le fibré principal  $G$  comme un sous-fibré de  $GL(M)$  : une  $H$ -structure. Les sections des fibrés associés sont des champs de tenseurs sur  $M$ , identifiés à des fonctions équivariantes de  $G$  dans l'espace de tenseurs correspondant de  $\mathfrak{m}$ . Si de plus ces sections sont  $G$ -invariantes pour l'action (1.42),

**Lemme 1.3.5.** — *Soit  $\nu$  une section d'un fibré associé  $G \times_H V$ . Elle est  $G$ -invariante si et seulement si la fonction associée  $\nu : G \rightarrow V$  est constante,  $Ad(H)$ -invariante.*

*Démonstration.* — L'action de  $G$  sur les sections de  $G \times_H V$  est donnée par

$$g'[g, v] = [g'g, v]$$

Lorsque  $V = \mathfrak{m}$ , on vérifie que cela correspond à l'action  $(g', X) \mapsto g'_*X$  sur  $TM$  par (1.45). Par conséquent une section  $\nu$  est  $G$ -invariante si et seulement si  $\forall g, g' \in G, \nu(g'g) = \nu(g)$  i.e. si et seulement si  $\nu$  est constante. En outre,  $v \in V$  ne peut définir une section du fibré associé que si quel que soit le changement de repère  $h \in H, d\rho(h^{-1})v = v$ , i.e.  $v$  est invariante pour la représentation de  $H$  sur  $V$ .  $\square$

Dans ce langage, une métrique  $G$ -invariante sur  $M$  n'est rien d'autre qu'un produit scalaire  $Ad(H)$ -invariant sur  $\mathfrak{m}$ . Cela revient à construire  $g$  en fixant sa valeur en un point puis en translatant par l'action du groupe, en utilisant la transitivité. Réciproquement si  $H$  est compact, on peut toujours trouver un tel produit scalaire c'est-à-dire une métrique  $G$ -invariante sur  $G/H$ . Alors les difféomorphismes (1.42) sont des isométries et  $G$  peut-être vu, si l'action est effective, comme un sous-groupe du groupe d'isométries. Cela donne lieu à la définition alternative d'un espace homogène :

**Définition 1.3.6.** — *Un espace homogène riemannien est une variété riemannienne  $(M, g)$  telle que le groupe d'isométries agit transitivement sur  $M$ .*

Le fibré tangent de  $G$  est isomorphe à  $G \times \mathfrak{g}$ . La distribution verticale, engendrée par les  $a^L, a \in \mathfrak{h}$ , est identifiée à  $G \times \mathfrak{h}$ . Par conséquent un supplémentaire  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{h}$  fournit aussi une distribution horizontale,  $G \times \mathfrak{m}$  ou

$$\mathfrak{m}_g = (L_g)_* \mathfrak{m}$$

Pour qu'elle soit  $H$ -équivariante,  $\mathfrak{m}_{gh} = (R_h)_* \mathfrak{m}_g$ , il faut et il suffit que  $\mathfrak{m}$  soit  $Ad(H)$ -invariant. Alors  $\mathfrak{m}_g$  est la distribution horizontale d'une  $H$ -connexion sur  $G$ . La forme de Maurer-Cartan  $\theta : TG \rightarrow \mathfrak{g}$  de  $G$  se décompose suivant (1.44) en  $\theta = \theta^{\mathfrak{h}} + \theta^{\mathfrak{m}}$ . Alors

**Proposition 1.3.7.** — *Pour un espace homogène réductif  $M = G/H$ , il existe une  $H$ -connexion sur  $G$  associée à  $\mathfrak{m}$ , de dérivée covariante  $\nabla^{\mathfrak{m}}$ , de 1-forme de connexion  $\omega = \theta^{\mathfrak{h}}$ . Cette connexion est  $G$ -invariante :  $\forall g \in G, (L_g)_* \omega = \omega$ . On l'appelle la connexion normale de l'espace homogène réductif.*

Dès lors, la torsion et la courbure de  $\nabla^{\mathfrak{m}}$  aussi sont  $G$ -invariantes c'est-à-dire, par le lemme 1.3.5, représentées par des tenseurs constants de  $\mathfrak{m}$ .

**Lemme 1.3.8.** — *La torsion  $T^{\mathfrak{m}}$  de  $\nabla^{\mathfrak{m}}$ , vue comme un tenseur de  $\mathfrak{m}$ , est une 2-forme à valeurs dans  $\mathfrak{m}$  :*

$$\forall u, v \in \mathfrak{m}, \quad T^{\mathfrak{m}}(u, v) = -[u, v]^{\mathfrak{m}}$$

*Démonstration.* — Un vecteur horizontal dans  $\mathfrak{m}_g$  peut-être vu, via  $\theta$ , comme le couple  $(g, v) \in G \times \mathfrak{m}$ . Par (1.45), il se projette sur le vecteur  $g_* \pi_*(v) \in T_{\pi(g)} M$ , image de  $v \in \mathfrak{m}$  par le repère  $g : \mathfrak{m} \rightarrow T_{\pi(g)} M$ . Par conséquent la forme tautologique de  $G$  est

$$\tau = \theta^{\mathfrak{m}}$$

en identifiant  $\mathfrak{m}$  à  $\mathbb{R}^m$ . Soient  $u, v \in \mathfrak{m}$ . Les champs de vecteurs  $u^R, v^R$  sont horizontaux. De plus  $\tau(u^R) = \theta(u^R) = u$  est constante, et de même  $\tau(v^R) = v$ . Par conséquent

$$d\tau(u^R, v^R) = -\tau([u^R, v^R]) = -[u, v]^{\mathfrak{m}}$$

□

**Lemme 1.3.9.** — *La courbure  $R^{\mathfrak{m}}$  de  $\nabla^{\mathfrak{m}}$ , vue comme un tenseur de  $\mathfrak{m}$  est une 2-forme à valeur dans  $\mathfrak{h}$  :*

$$R_{u,v}^{\mathfrak{m}} = [u, v]^{\mathfrak{h}}$$

*Démonstration.* — En effet, la courbure est un tenseur de  $\Lambda^2 \otimes \mathfrak{h}(M)$  donc identifiée à une 2-forme horizontale sur  $G$  à valeurs dans  $\mathfrak{h}$ , ou encore à une fonction de  $G$  dans  $\Lambda^2 \mathfrak{m}^* \otimes \mathfrak{h}$ . Comme elle  $G$ -invariante cette fonction est constante et il suffit pour trouver sa valeur de l'évaluer en  $e$  : soient  $u, v \in \mathfrak{m}$ ,

$$R_{u,v}^{\mathfrak{m}} = \omega([u, v]) = [u, v]^{\mathfrak{h}}$$

□

La connexion normale a une propriété exprimée par le lemme suivant :

**Lemme 1.3.10.** — *Toute section  $\nu$  d'un fibré associé de  $G$ , invariante, est parallèle pour la connexion normale :  $\nabla^m \nu = 0$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\nu$  une section d'un fibré associé de  $G$ , associée à une fonction équivariante  $\nu$ . La dérivée covariante est donnée par

$$\nabla_X^m \nu = [g, d\nu(\tilde{X}_g)]$$

Maintenant, si  $\nu$  est  $G$ -invariante,  $\nu$  est constante par le lemme 1.3.5 donc  $\nabla^m \nu = 0$ .  $\square$

En particulier  $T^m$  et  $R^m$  sont  $G$ -invariantes donc

**Proposition 1.3.11.** — *La torsion et la courbure de la connexion normale sont parallèles pour  $\nabla^m$  :*

$$\nabla^m T^m = 0, \quad \nabla^m R^m = 0$$

Réciproquement, on va voir qu'une connexion dont la torsion et la courbure sont parallèles détermine sous certaines conditions une structure d'espace homogène sur la variété.

Soit  $H$  un sous-groupe de Lie de  $GL(m, \mathbb{R})$ , d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ . Soient

$$T \in \Lambda^2(\mathbb{R}^m)^* \otimes (\mathbb{R}^m)^*$$

et

$$\tilde{R} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^m)^* \otimes \mathfrak{h}$$

deux tenseurs invariants par  $H$  vérifiant

$$(1.46) \quad \mathfrak{S}\{\tilde{R}_{X,Y}Z\} = \mathfrak{S}\{T(T(X,Y), Z)\}$$

et

$$(1.47) \quad \mathfrak{S}\{\tilde{R}_{T(X,Y),Z}\} = 0$$

Par les lemmes 1.3.8 et 1.3.9, la torsion et la courbure de la connexion normale d'un espace homogène déterminent les composantes dans  $\mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{h}$ , respectivement, du crochet de deux vecteurs, c'est-à-dire en fin de compte la structure d'algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ . De même ici on pose

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}^m$$

et on définit un produit antisymétrique sur  $\mathfrak{g}$ , prolongeant le crochet de Lie de  $\mathfrak{h}$  :

$$(1.48) \quad \forall a \in \mathfrak{h}, \forall u \in \mathbb{R}^m, \quad [a, u] = -[u, a] = a(u)$$

$$(1.49) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^m, \quad [u, v] = \tilde{R}_{u,v} - T(u, v)$$

Notons que par (1.48),  $[\mathfrak{h}, \mathbb{R}^m] \subset \mathbb{R}^m$  ce qui correspond à l'hypothèse  $Ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$  pour un espace homogène réductif.

**Lemme 1.3.12.** — *L'espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  muni du crochet défini par (1.48), (1.49) est une algèbre de Lie.*

*Démonstration.* — On vérifie l'identité de Bianchi. Bien sûr pour  $a, b, c \in \mathfrak{h}$ ,

$$[[a, b], c] + [[c, a], b] + [[b, c], a] = 0$$

Soient  $a, b \in \mathfrak{h}$  et  $u \in \mathbb{R}^m$ ,

$$[[a, b], u] + [[u, a], b] + [[b, u], a] = [a, b](u) + b(a(u)) - a(b(u)) = 0$$

car le crochet sur  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$  coïncide avec le commutateur.

Soient  $a \in \mathfrak{h}$  et  $u, v \in \mathbb{R}^m$ ,

$$\begin{aligned} [[a, u], v] &+ [[v, a], u] + [[u, v], a] \\ &= \tilde{R}_{a(u),v} - T(a(u), v) - \tilde{R}_{a(v),u} - T(a(v), u) + [\tilde{R}_{u,v}, a] + a(T(u, v)) \\ &= -(a \cdot \tilde{R})_{u,v} + a \cdot T(u, v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car  $T$  et  $\tilde{R}$  sont des tenseurs invariants. Enfin soient  $u, v, w \in \mathbb{R}^m$ ,

$$\begin{aligned} [[u, v], w] &= [\tilde{R}_{u,v}, w] - [T(u, v), w] \\ &= \tilde{R}_{u,v}w - \tilde{R}_{T(u,v),w} + T(T(u, v), w) \end{aligned}$$

En scindant suivant  $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}^m$ , en permutant circulairement suivant  $u, v, w$ , on reconnaît (1.46), (1.47) donc on a bien

$$[[u, v], w] + [[w, u], v] + [[v, w], u] = 0$$

□

Le couple  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  est appelé *modèle infinitésimal*. Il existe un unique groupe de Lie  $G$  simplement connexe dont  $\mathfrak{g}$  soit l'algèbre de Lie et un unique sous-groupe de Lie  $H \subset G$ , d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ . F. Tricerri [52] a donné la condition pour qu'on obtienne de cette façon un espace homogène, en faisant le quotient  $G/H$  :

**Proposition 1.3.13.** — *Les tenseurs  $T$  et  $\tilde{R}$ , vérifiant (1.46), (1.47), sont la torsion et la courbure de la connexion normale d'un espace homogène réductif au point  $o$  si et seulement si  $H$  est un sous-groupe fermé de  $G$ . Dans ce cas le modèle infinitésimal qu'il permettent de construire est dit « régulier ».*

Considérons maintenant la situation suivante

**Définition 1.3.14.** — *On appelle variété localement homogène une variété munie d'une connexion  $\tilde{\nabla}$  dont la torsion  $T$  et la courbure  $\tilde{R}$  sont parallèles :*

$$(1.50) \quad \tilde{\nabla}T = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\nabla}\tilde{R} = 0$$

Soient  $H$  le groupe d'holonomie de  $\tilde{\nabla}$  et  $P$  la réduction d'holonomie (une  $H$ -structure). Bien sûr  $\tilde{\nabla}$  est une  $H$ -connexion sur  $P$ . Puisque la torsion  $T$  est parallèle, par (1.16), la fonction  $\mathbf{T} : P \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^m)^* \otimes (\mathbb{R}^m)^*$  est localement constante. De même  $\tilde{\mathbf{R}} : P \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^m)^* \otimes \mathfrak{h}$ . De plus elles vérifient (1.46), (1.47) : ce ne sont rien d'autre que les identités de Bianchi (1.28) et (1.29), compte-tenu de (1.50). On dispose donc d'un modèle infinitésimal à partir duquel on peut construire un espace homogène comme à la proposition 1.3.13 s'il est régulier.

**Proposition 1.3.15 (Tricerri).** — *Une variété localement homogène est localement difféomorphe à un espace homogène si et seulement si le modèle infinitésimal associé est régulier.*

Si la variété est simplement connexe, on peut trouver un difféomorphisme global.

**Remarque :** Si  $H$  est un groupe compact et que la torsion de  $\tilde{\nabla}$  est nulle,  $[\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m] \subset \mathbb{R}^m$  par (1.49) c'est-à-dire

$$(1.51) \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m} \quad \text{et} \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$$

Cela correspond aux *espaces symétriques*. Dans ce cas on peut construire sur  $G$  un automorphisme  $\sigma$  d'ordre 2 en demandant que la différentielle de  $\sigma$  en  $e$  vale  $Id$  sur  $\mathfrak{h}$  (alors  $H$  est inclus dans l'ensemble des points fixes de  $\sigma$ ) et  $-Id$  sur  $\mathfrak{m}$  puis en intégrant via l'exponentielle. On peut alors définir les *espaces localement symétriques* comme un cas particulier de 1.3.14 : ce sont les variétés riemanniennes  $(M, g)$  telles que la courbure riemannienne est parallèle pour la connexion de Levi-Civita :  $\nabla R = 0$  (voir [39], chapitre 11, pour les détails).



# CHAPITRE 2

## REPRÉSENTATIONS

On construit les fibrés associés d'un fibré principal  $G(M)$  en connaissant les représentations de  $G$ . Soit  $V$  une représentation linéaire de  $G$

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

En décomposant  $V$  en composantes irréductibles  $V = \bigoplus_i V_i$ , on décompose le fibré  $V(M) = G(M) \times_G V$  en autant de sous-fibrés supplémentaires, associés à  $G(M)$  par les représentations induites  $\rho_i : G \rightarrow GL(V_i)$ . On utilisera ce procédé dans le cas où  $V = \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}^\perp$  pour classifier les  $G$ -structures en regardant leur torsion intrinsèque  $\bar{\nabla} \in \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}^\perp(M)$  (voir chapitre 3, section 2 et 3, pour les variétés presque hermitiennes, resp. les variétés  $SU(3)$ ). D'autre part la résolution de problèmes naturels sur les  $G$ -variétés – comme pour  $G = U(n)$  l'intégrabilité de la structure presque complexe de l'espace de twisteurs réduit (voir chapitre 6) –, conduit à des équations  $G$ -équivariantes c'est-à-dire les équations de sous-espaces de tenseurs stables sous l'action du fibré intérieur  $IntG(M)$ . Pour ces raisons il est utile de rassembler ici quelques définitions et résultats sur les représentations des groupes de Lie compacts. Après avoir rappelé les définitions des poids et racines, on consacre une section à la décomposition des produits tensoriels de représentations irréductibles telle que la méthode, sans utiliser de logiciel informatique, est exposée par Salamon au chapitre 6 de son livre [48]. On a aussi fait de nombreux emprunts au livre [10] de T. Bröcker et T. tom Dieck, surtout à la section 2.

### 2.1. Représentations réelles, représentations complexes

Dans la suite du chapitre, on s'intéressera surtout aux représentations complexes de  $G$ . Ce qui rend cette restriction légitime, quoiqu'on prenne toujours pour objet des variétés

réelles, est visible dans le cas de  $U(n)$  où on sait par exemple que la décomposition en types réels d'une forme réelle  $\alpha \in \Lambda^p$  (selon la décomposition en sous-espaces irréductibles de la représentation réelle sous-jacente) n'est qu'une sous-décomposition de la décomposition en types complexes, obtenue en considérant  $\alpha$  comme un élément du complexifié  $\lambda^p = \Lambda_{\mathbb{C}}^p$ . Par exemple une forme réelle de type  $(3,0)+(0,3)$  est la somme de deux formes (complexes) conjuguées de type  $(3,0)$  et  $(0,3)$ , respectivement. Mais on peut donner une raison générale, pour un groupe de Lie  $G$  compact quelconque, comme on le fait dans cette section.

Soit  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. On appelle *structure réelle* sur  $V$  un  $\mathbb{C}$ -anti-automorphisme  $\tau$  de carré 1,  $\tau^2 = Id$ . On appelle *structure quaternionique* de  $V$  un  $\mathbb{C}$ -anti-automorphisme  $j$  de carré  $-1$ . Une représentation complexe irréductible de  $G$  sur  $V$  est dite de *type réel* (resp. *quaternionique*) si et seulement si  $V$  admet une structure réelle (resp. quaternionique) équivariante. Dans ces deux cas  $V$  est isomorphe, comme représentation de  $G$ , à la représentation duale  $\bar{V}$ . Si au contraire  $V \not\simeq \bar{V}$  la représentation est dite de *type complexe*. Or il s'agit des trois seules possibilités et elles sont exclusives :

**Proposition 2.1.1.** — *Soit  $V$  un espace de représentation irréductible complexe de  $G$ . Une seule proposition parmi les trois suivantes est vraie.*

(i) *La représentation est de type réel :  $V \simeq \bar{V}$  et*

$$\dim(S^2 V^*)^G = 1, \quad \dim(\Lambda^2 V^*)^G = 0$$

(ii) *La représentation est de type quaternionique :  $V \simeq \bar{V}$  et*

$$\dim(S^2 V^*)^G = 0, \quad \dim(\Lambda^2 V^*)^G = 1$$

(iii) *La représentation est de type complexe :  $V \not\simeq \bar{V}$ .*

*Démonstration.* — Par le lemme de Schur, l'ensemble des endomorphismes équivariants de  $V$  est de dimension 1 pour une représentation irréductible :

$$\dim(V^* \otimes V)^G = 1$$

Le groupe  $G$  étant compact, il préserve un produit scalaire hermitien  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  grâce à quoi  $V^*$  est isomorphe comme représentation à  $\bar{V}$ . Si  $V \not\simeq \bar{V}$  on est dans le cas (iii) par définition. Si  $V \simeq \bar{V}$ ,

$$V^* \otimes V \simeq V^* \otimes V^* = S^2 V^* \oplus \Lambda^2 V^*$$

et même

$$(V^* \otimes V)^G \simeq (S^2 V^*)^G \oplus (\Lambda^2 V^*)^G$$

donc les deux seuls cas possibles sont (i) et (ii).

Un élément invariant  $\alpha$  de  $V^* \otimes V^*$  définit, en se servant du produit scalaire, un endomorphisme  $\mathbb{C}$ -antilinéaire équivariant  $f \in V^* \otimes \bar{V}$  tel que  $\langle f(u), v \rangle = \alpha(u, v)$ . On voit que  $f$  est autoadjoint si  $\alpha$  est symétrique, anti-autoadjoint si  $\alpha$  est antisymétrique mais dans les deux cas le carré de  $f$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire, hermitien, donc par le lemme de Schur c'est un multiple réel de l'identité :  $f^2 = \lambda Id$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . De plus si  $f$  est conjugué  $\forall u \in V \setminus \{0\}$ ,  $\langle f^2(u), u \rangle = \langle f(u), f(u) \rangle > 0$  donc  $\lambda > 0$  et si  $f$  est anticonjugué,  $\lambda < 0$ . Dans le premier cas la structure réelle est donnée par  $\tau = \sqrt{\lambda}f$  et dans le deuxième cas  $j = \sqrt{-\lambda}f$  est une structure quaternionique.  $\square$

Pour faire le lien avec les représentations réelles on peut simplement regarder  $V$  comme un sous-espace réel en « oubliant » la structure complexe : soit  $V$  un espace de représentation complexe de  $G$ , on note  $\llbracket V \rrbracket$  l'espace de représentation réel sous-jacent, de telle sorte que  $\dim_{\mathbb{R}} \llbracket V \rrbracket = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$ . Cependant si  $V$  est irréductible, ce n'est pas nécessairement le cas de  $\llbracket V \rrbracket$ . En effet si  $V$  est de type réel, appelons  $[V]$  le sous-espace propre de  $\tau$  pour la valeur propre 1,  $\dim_{\mathbb{R}} [V] = \dim_{\mathbb{C}} V$ . Comme  $\tau$  est  $\mathbb{C}$ -antilinéaire, ce n'est pas un sous-espace complexe, en revanche c'est un sous-espace propre réel  $G$ -invariant de  $\llbracket V \rrbracket$ . De plus,  $V$  est la somme directe des sous espaces propres de  $\tau$  pour les valeurs propres  $i$  et  $-i$  :

$$(2.1) \quad V = [V] \oplus i[V]$$

**Proposition 2.1.2.** — *Soit  $V$  une représentation complexe irréductible de  $G$ . La représentation réelle  $\llbracket V \rrbracket$  est irréductible si et seulement si  $V$  est de type complexe ou quaternionique. Lorsque elle est de type réel,  $V$  est la complexification d'une représentation réelle,  $[V] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  et  $\llbracket V \rrbracket \simeq 2[V]$  où  $[V]$  est irréductible.*

### Exemple

L'exemple fondamental pour nous est l'espace des formes de type  $(p, q)$  qui sera défini au chapitre 3. On sait que l'intersection de cet espace  $\lambda^{p,q}$  avec les  $r$ -formes réelles ( $r = p + q$ ) est nulle si  $p \neq q$ . En revanche  $\lambda^{p,q} \oplus \lambda^{q,p}$  est la complexification de l'espace des formes réelles de type  $(p, q) + (q, p)$ , isomorphe comme représentation réelle à  $\llbracket \lambda^{p,q} \rrbracket$ . De l'autre côté si  $p = q$  on a directement que  $\lambda^{p,p}$  est la complexification de  $[\lambda^{p,p}]$ , l'espace des formes réelles de type  $(p, p)$ .

Maintenant si on part d'une représentation réelle  $U$  :

**Proposition et définition 2.1.3.** — *Toute représentation réelle irréductible  $U$  est de la forme*

(i)  $U \simeq [V]$  avec  $V$  une représentation irréductible complexe de type réel. Dans ce cas la représentation réelle  $U$  est elle aussi dite de type réel.

(ii) ou  $U \simeq \llbracket V \rrbracket$  avec  $V$  irréductible de type complexe ou quaternionique. Dans ce cas  $U$  est dite de type complexe ou quaternionique, respectivement.

*Démonstration.* — On pose  $W = U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ,  $W$  est une représentation complexe de  $G$ . Alors, de deux choses l'une. Si elle est irréductible, elle est de type réel avec  $\tau$  la conjugaison :  $\forall u, v \in U$ ,  $\tau(u+iv) = u-iv$ . Si elle est réductible, comme  $\llbracket W \rrbracket \simeq 2U$  et  $U$  est irréductible, on a  $W = V + V'$  avec  $V, V'$  irréductibles et  $\llbracket V \rrbracket \simeq \llbracket V' \rrbracket \simeq U$ . Les deux seules possibilités sont donc  $V' \simeq \bar{V}$  avec  $V \not\simeq \bar{V}$  ou  $V' \simeq V$ . Elles correspondent respectivement bien sûr à  $V$  de type complexe ou quaternionique.  $\square$

La justification des noms donnés aux types de représentation réelles ou complexes est la suivante. Soit  $U$  une représentation réelle, de dimension  $m$ . Comme  $G$  est compact, il préserve un produit scalaire sur  $U$  et l'existence d'une telle représentation fournit une inclusion  $G \subset SO(m)$ . De même si  $V$  est une représentation complexe de dimension (complexe)  $m'$ ,  $G \subset U(m')$ . Qu'on puisse construire la représentation complexe  $U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  à partir de la représentation réelle  $U$  comme à la démonstration précédente est une autre façon de dire  $SO(m) \subset U(m)$ . De plus,

**Proposition 2.1.4.** — Si  $U$  est de type complexe,  $m$  est pair,  $m = 2n$  et  $G \subset U(n)$ . Si  $U$  est de type quaternionique,  $m = 4q$ ,  $q \in \mathbb{N}$  et  $U \subset Sp(q)$ .

Si  $U$  est de type réel on n'a en général pas mieux que  $G \subset SO(m)$ .

*Démonstration.* — Lorsque  $U$  est de type complexe ou quaternionique, par la démonstration de la proposition 2.1.3,  $U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V \oplus \bar{V}$  pour une représentation complexe  $V$  de dimension  $n$  avec  $m = 2n$ . Si  $U$  est de type quaternionique,  $V$  est muni d'un endomorphisme  $j$ , de carré -1. Donc  $n$  doit être pair,  $n = 2q$  et  $G$  préserve  $i, j$  et  $k = ij = -ji$ , donc il est inclus dans  $Sp(q)$ .  $\square$

### Exemple

La particularité du cas qui nous intéresse  $G = U(n)$  est qu'une représentation réelle  $U$  peut toujours être vue comme une représentation complexe, sans passer par la complexification. En effet elle préserve un endomorphisme  $J$  de carré -1 de  $U$  et on pose, pour tout  $u \in U$ ,  $iu = Ju$ . La représentation complexe ainsi obtenue est notée  $U^{\mathbb{C}}$  de telle sorte que  $\llbracket U^{\mathbb{C}} \rrbracket = U$ .

Or on a le résultat très important (cf [10], p268) :

**Proposition 2.1.5.** — *Les représentations irréductibles de  $U(n)$  sont de type réel ou complexe, jamais quaternionique.*

On a donc les trois possibilités données par Nagy dans [43]

**Lemme 2.1.6.** — *Soit  $U$  une représentation réelle de  $U(n)$ . Une seule proposition parmi les trois suivantes est vraie :*

- (i)  $U^{\mathbb{C}}$  est réductible (alors  $U$  est aussi réductible).
- (ii)  $U^{\mathbb{C}}$  est irréductible mais  $U$  est réductible, donc  $U^{\mathbb{C}}$  est de type réel.
- (iii)  $U^{\mathbb{C}}$  et  $U$  sont irréductibles et de type complexe.

De plus si on sait décomposer les représentations complexes de  $U(n)$  en composantes irréductibles, il faut peu de travail pour obtenir la décomposition des représentations réelles. C'est pourquoi à la section 3 on se limitera aux produits tensoriels de représentations complexes. Pour obtenir de là les décompositions de produits tensoriels de représentations réelles, la marche à suivre est donnée par la

**Proposition 2.1.7.** — *Soit  $V, W$  des représentations complexes de  $G$ . Lorsque ces expressions ont un sens (i.e. en (2.3) et (2.4), lorsque  $V$ , ou  $V$  et  $W$ , admettent une structure réelle) :*

$$(2.2) \quad \llbracket V \rrbracket \otimes \llbracket W \rrbracket \simeq \llbracket V \otimes W \rrbracket \oplus \llbracket V \otimes \overline{W} \rrbracket$$

$$(2.3) \quad [V] \otimes [W] \simeq [V \otimes W]$$

$$(2.4) \quad [V] \otimes [W] \simeq [V \otimes W]$$

NB : lorsque  $V$  et  $W$  admettent une structure réelle,  $V \otimes W$  en admet une aussi.

*Démonstration.* — Soit  $U, U'$  deux représentations réelles de  $G$ .

$$(U \otimes_{\mathbb{R}} U') \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = (U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (U' \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$

Alors, supposons qu'il existe deux représentations complexes  $V, W$  telles que  $U = [V]$  et  $U' = [W]$ ,

$$(U \otimes U') \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V \otimes W$$

d'où (2.4). Si  $U = [V]$ ,  $U' = [W]$ ,

$$(U \otimes U') \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq V \otimes (W \oplus \overline{W}) \simeq V \otimes W \oplus \overline{V} \otimes \overline{W}$$

c'est-à-dire (2.3). En effet  $\overline{V} \simeq V$  à cause de la structure réelle. Enfin si  $U = \llbracket V \rrbracket$  et  $U' = \llbracket W \rrbracket$ ,

$$(U \otimes U') \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq (V \otimes W \oplus \overline{V} \otimes \overline{W}) \oplus (V \otimes \overline{W} \oplus \overline{V} \otimes V)$$

c'est-à-dire (2.2). □

## 2.2. Poids et racines

Dans toute cette section  $G$  désigne un groupe de Lie compact, connexe,  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie et  $V$  un espace de représentation complexe de  $G$ ,

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

On définit une action dérivée de l'algèbre de Lie, qui peut-être identifiée à la différentielle à l'origine

$$d\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

En effet  $\mathfrak{g} \simeq T_e G$ . Cette application vérifie en outre

$$(2.5) \quad d\rho([X, Y]) = [d\rho(X), d\rho(Y)]$$

On rappelle que  $\mathfrak{gl}(V)$  est identifiée canoniquement à l'algèbre des endomorphismes de  $V$ . Le crochet dans le membre de droite est alors interprété comme le commutateur. Une telle application est appelée représentation de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Il sera souvent commode de travailler avec cette version infinitésimale de  $\rho$ . Notons que  $d\rho$  avait été autrement définie précédemment par (1.3). Alors par naturalité de l'exponentielle le diagramme

$$(2.6) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\rho} & \mathfrak{gl}(V) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow[\rho]{} & GL(V) \end{array}$$

commute.

On appelle *tore* un sous-groupe abélien de  $G$ . Comme  $G$  est compact, un tel sous-groupe est isomorphe à un produit de cercles  $S^1 \times \dots \times S^1$ . Un *tore maximal* est un tore contenu dans aucun autre tel sous-groupe. Tous les tores maximaux d'un groupe compact sont conjugués ([10], p159) et leur dimension commune (ou celle de leur algèbre de Lie) s'appelle le *rang* du groupe. On en fixe un par conséquent, noté  $T$ . On appelle  $\mathfrak{t}$  son algèbre de Lie, de dimension  $p : \mathfrak{t}$  est une sous-algèbre de Cartan – un sous-espace abélien

de dimension maximale de  $\mathfrak{g}$ . La théorie des représentations est fondée sur le fait qu'il suffit pour caractériser une représentation de  $G$  d'étudier sa restriction à un tore maximal. Or les représentations d'un groupe abélien sont les plus simples possibles.

**Lemme 2.2.1.** — *Les représentations irréductibles complexes d'un groupe abélien sont de dimension 1.*

*Démonstration.* — Soit  $T$  un groupe abélien,  $V$  une représentation complexe irréductible de  $T$ . Quel que soit  $g \in T$ ,  $\rho(g)$  est un endomorphisme équivariant de  $V$ . En effet,  $\forall g, h \in T$ ,  $\rho(g) \circ \rho(h) = \rho(gh)$  donc  $\rho(g)$  commute avec  $\rho(h)$  pour tout  $h \in T$  car le groupe est abélien. Alors par le lemme de Schur,  $\forall g \in T$ ,  $\rho(g)$  doit être un multiple de l'identité. Mais cela implique que tout sous-espace complexe de  $V$  est invariant donc  $V$  est une droite complexe,  $V \simeq \mathbb{C}$ .  $\square$

On a même une description plus précise de cette représentation, c'est-à-dire du multiple  $\lambda(g) \in \mathbb{C}$  dans  $\rho(g)v = \lambda(g)v$ . Comme  $V$  est de dimension 1,  $GL(V)$  est identifié à  $\mathbb{C}^*$  et si on choisit un produit scalaire invariant sur  $V$ ,  $\forall g \in G$ ,  $\rho(g) \in U(V)$ , identifié à  $U(1)$  ou  $S^1 = \{e^{2\pi i x}, x \in \mathbb{R}\}$ . Il existe finalement  $A : T \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\lambda(g) = e^{2\pi i A(g)}$ .

Au niveau des algèbres de Lie cela se traduit par l'existence d'une forme linéaire  $\alpha \in \mathfrak{t}^*$  telle que, pour tous  $X \in \mathfrak{t}$ ,  $v \in V$

$$d\rho(X)v = 2\pi i \alpha(X)v$$

A cause de (2.6) les deux applications sont liées par

$$(2.7) \quad \alpha(X) = A(\exp(X))$$

Soit maintenant  $V$  un espace de représentation complexe de  $G$  ou  $\mathfrak{g}$ . On décompose la représentation induite de  $\mathfrak{t}$  en composantes isotypiques

$$(2.8) \quad V = \bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}$$

L'indice est une forme linéaire comme expliqué plus haut. La dimension de  $V_{\alpha}$  n'est pas nécessairement égale à 1.

**Définition 2.2.2.** — *Une forme linéaire  $\alpha$ , apparaissant dans (2.8), caractérisant une représentation irréductible du tore de dimension  $p$ , est un poids de la représentation  $V$  de  $G$ . Le nombre  $\text{mult}(\alpha) = \dim_{\mathbb{C}} V_{\alpha}$  est la multiplicité de  $\alpha$  en tant que poids de  $V$ . Enfin l'ensemble des poids de  $V$  est noté  $\mathcal{P}(V)$ .*

Cependant  $\alpha$  ne peut pas être n'importe quelle forme dans  $\mathfrak{t}^*$ . Pour que  $\rho$  soit une représentation il faut  $\rho(e) = Id$  donc  $A(e) \in \mathbb{Z}$ . On obtient donc, par (2.7), que tout poids  $\alpha$  de  $V$  est un élément de

$$\mathcal{P} = \{\alpha \in \mathfrak{t}^* \mid \forall X \text{ tq } \exp(X) = e, \alpha(X) \in \mathbb{Z}\}$$

Le sous-ensemble  $\mathcal{P}$  de  $\mathfrak{t}^*$  est appelé *réseau des poids abstraits*. Il existe des coordonnées sur  $\mathfrak{t}^* \simeq \mathbb{R}^p$  telles que  $\mathcal{P}$  soit le réseau entier :

$$\mathcal{P} = \{(d_1, \dots, d_p) \in \mathfrak{t}^* \mid \forall i = 1, \dots, p, d_i \in \mathbb{Z}\}$$

### Exemple

On représente conventionnellement  $U(n)$  par l'ensemble des matrices carrées de taille  $n \times n$  à coefficients complexes, unitaires et son algèbre de Lie  $\mathfrak{u}(n)$  par les matrices antihermitiennes. Le sous-groupe des matrices diagonales

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & z_n \end{pmatrix} \mid \forall i = 1, \dots, n, z_i \in \mathbb{C}, |z_i| = 1 \right\}$$

est évidemment un tore. De plus c'est un tore maximal de  $U(n)$ . En effet l'inclusion d'un tore  $T'$  dans  $U(n)$  est une représentation unitaire de  $T'$  sur  $\mathbb{C}^n$ . Grâce au lemme 2.2.1, on décompose  $\mathbb{C}$  en sous-espaces complexes de dimension 1 sur lesquels  $T'$  agit trivialement, autrement dit il existe une base hermitienne où les matrices de  $T'$  sont toutes diagonales. Le changement de base est représenté par un élément de  $U(n)$  et  $T'$  est conjugué par cet élément à un sous-groupe de  $T$ .

Donc le rang de  $U(n)$  est  $n$ . On se donne les coordonnées canoniques sur  $T$

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \quad (x_1, \dots, x_n) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} e^{2\pi i x_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{2\pi i x_n} \end{pmatrix}$$

et sur  $\mathfrak{t}$

$$(x_1, \dots, x_n) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 2\pi i x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 2\pi i x_n \end{pmatrix}$$

Dès lors  $\mathcal{P}$  est le réseau entier pour les coordonnées duales comme annoncé.



Pour organiser les poids, et par suite classer les représentations de  $G$ , on doit considérer une représentation importante : la représentation adjointe de  $G$  sur son algèbre de Lie. Soit la conjugaison

$$\begin{aligned} \text{Inn}_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

Alors  $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$  est définie par  $\text{Ad}(g) = (\text{Inn}_g)_{*e}$  et la représentation dérivée  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  vaut

$$\text{ad}(X)Y = [X, Y]$$

Notons que (2.5) n'est rien d'autre dans ce cas que l'identité de Jacobi. On étend ces représentations à  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  par  $\mathbb{C}$ -linéarité. Pour tout poids  $\alpha$  de  $\text{Ad}$ , on abrège  $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\alpha}$  en  $\mathfrak{g}_{\alpha}$ . Le poids 0 correspond au sous-espace  $\mathfrak{g}_0$  de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  où  $\mathfrak{t}$  agit trivialement et puisque  $\text{ad}$  est le commutateur et  $\mathfrak{t}$  un sous-espace abélien,  $\mathfrak{g}_0$  contient  $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \otimes \mathbb{C}$ . Comme  $\mathfrak{t}$  est de plus maximale on a  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ . Outre ce poids trivial, les poids non nuls de la représentation  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  sont appelés les *racines* de  $G$ . Leur ensemble fini, dénoté  $\mathcal{R}$  est appelé *système* de racines. On va voir qu'il vérifie des conditions très fortes.

D'abord on doit faire une remarque importante compte-tenu qu'on s'intéresse particulièrement au groupe  $U(n)$ . Soit  $Z(G)$  le centre de  $G$ . Quasiment par définition, la représentation induite de la représentation adjointe  $\text{Ad}$  à  $Z(G)$  est triviale. Cela implique que les racines vivent éventuellement dans un sous-espace propre de  $\mathfrak{t}^*$ . Soit  $Z(\mathfrak{g})$  l'algèbre de Lie de  $Z(G)$ . Bien sûr  $Z(\mathfrak{g}) \subset Z(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$ .

**Lemme 2.2.3.** — *Les racines  $\alpha \in \mathcal{R}$  appartiennent à l'annihilateur  $R$  de  $Z(\mathfrak{g})$  dans  $\mathfrak{t}^*$ .*

De plus  $Z(\mathfrak{g}) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{R}} \ker \alpha$ , donc  $\mathcal{R}$  engendre exactement  $R$  et le rang de  $\mathcal{R}$  est égal à la co-dimension du centre. En particulier  $\mathcal{R}$  est un système générateur de  $\mathfrak{t}^*$  si et seulement si  $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$  c'est-à-dire si  $Z(G)$  est fini donc  $G$  est semi-simple ( $G$  est compact). Dans le cas contraire (comme celui du groupe unitaire), l'étude de la représentation adjointe ne permet pas de d'écrire les poids d'une représentation quelconque de  $G$  mais il faut aussi regarder la représentation du centre.

Parmi les bases de  $R$  on en distingue certaines :

**Définition 2.2.4.** — *Un sous-ensemble  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{R}$  est appelé base du système de racines si*

- (i)  $\mathcal{B}$  est une base de  $R = \text{Vect}(\mathcal{R})$
- (ii) Tout élément  $\alpha \in \mathcal{R}$  peut s'écrire

$$(2.9) \quad \alpha = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} n_{\beta} \beta$$

où les  $n_\beta$  sont des entiers soit tous positifs ou tous négatifs.

On admet qu'il en existe. Alors  $\mathcal{R}$  est l'union disjointe de  $\mathcal{R}_+$  et  $\mathcal{R}_-$ , respectivement les racines positives – celles dont les coefficients  $n_\beta$  dans (2.9) sont tous positifs – et les racines négatives.

### Exemple

Le complexifié de  $\mathfrak{u}(n)$  est  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , l'ensemble des matrices carrées de taille  $n \times n$  à coefficients complexes. Le sous-espace pour le poids nul de la représentation adjointe (complexe) est  $\mathfrak{u}(n)_0 = \mathfrak{t} \otimes \mathbb{C}$ , l'ensemble des matrices diagonales. Un supplémentaire évident est  $\mathfrak{m}$ , l'ensemble des matrices avec des zéros sur la diagonale. Soit  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{t}$ ,  $Y = (Y_{j,k})_{1 \leq j,k \leq n} \in \mathfrak{m}$  ( $\forall j = 1, \dots, n, Y_{j,j} = 0$ ). Les coordonnées de  $ad(X)Y$  sont données par

$$[X, Y]_{j,k} = 2\pi i(x_j - x_k)Y_{j,k}$$

Par conséquent la base canonique de  $\mathfrak{m}$ , formée des matrices  $E_{j,k}$ ,  $j \neq k$  avec 1 à la  $j$ -ième ligne de la  $k$ -ième colonne, 0 partout ailleurs, fournit la décomposition en composantes irréductibles (2.8) et les racines :

$$(2.10) \quad [X, E_{j,k}] = 2\pi i(x_j - x_k)E_{j,k}$$

On note aussi  $x_j \in \mathfrak{t}^*$ ,  $j = 1, \dots, n$  la fonction coordonnée :

$$x_j : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$$

Alors

**Proposition 2.2.5.** — *On peut donner du système de racines  $\mathcal{R}$  de  $U(n)$  la description suivante :*

- (i) Les racines sont les  $x_j - x_k$ ,  $j, k = 1, \dots, n$ ,  $j \neq k$ .
- (ii) Le sous-espace correspondant est  $\mathfrak{u}(n)_{x_j - x_k} = \mathbb{C}E_{j,k}$  et la multiplicité 1.
- (iii) Une base du système de racines est  $\mathcal{B} = \{x_j - x_{j+1} \mid j = 1, \dots, n-1\}$ .
- (iv) Les racines positives sont les  $x_j - x_k$ ,  $j < k$ .

Dans les coordonnées duales des coordonnées canoniques de  $\mathfrak{t}$ , les racines positives sont de la forme

$$\alpha \in \mathcal{R}^+, \alpha = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$$

et les éléments de la base sont les  $(0, \dots, 1, -1, \dots, 0)$  avec 1 prenant toutes les places jusqu'à la  $(n-1)$ -ième.

*Démonstration.* — Les points (i) et (ii) résultent de (2.10). Bien sûr  $x_j - x_k$ ,  $j > k$  n'est rien d'autre que  $-(x_k - x_j)$ . Alors (iii) et (iv) viennent de

$$\forall j < k, \quad x_j - x_k = \sum_{l=j}^{k-1} x_l - x_{l+1}$$

□

A présent, le centre  $Z(G)$  de  $U(n)$  est constitué des multiples  $zI_n$ ,  $|z| = 1$  de l'identité et  $Z(\mathfrak{g}) = \{2\pi i x I_n \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{t} \mid x_1 = \dots = x_n\}$  est de dimension 1. Comme prévu  $\forall X \in Z(\mathfrak{g}), \forall \alpha \in \mathcal{R}, \alpha(X) = 0$  et  $\mathcal{R}$  est de rang  $n - 1$  bien que le groupe  $U(n)$  soit de rang  $n$ . Cela se traduit dans les coordonnées canoniques par  $R = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{t}^* \mid \sum_{j=1}^n x_j = 0\}$ . On appelle  $S$  le sous-espace analogue de  $\mathfrak{t}$ .

On appellera ainsi dans la suite  $S$  un supplémentaire de  $Z(\mathfrak{g})$  dans  $\mathfrak{t}$ , de dimension  $q$ . Le sous-espace  $R$  peut être identifié au dual  $S^*$  et les racines  $\alpha$  ne seront regardées que dans leur restriction à  $S$ .

Pour tout  $\alpha \in \mathcal{R}$ , vue comme une forme linéaire sur  $S$ , son noyau  $\ker \alpha$  est un hyperplan de  $S$  et l'ensemble de ces hyperplans divise  $S$  en un nombre fini de domaines convexes, les *chambres de Weyl* du système de racines.

**Définition 2.2.6.** — Les composantes connexes de  $S \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{R}} \ker \alpha$  sont appelées *chambres de Weyl* de  $\mathcal{R}$ . Une chambre de Weyl  $\Upsilon$  est ouverte dans  $S$  par définition et on désigne par  $\tilde{\Upsilon}$  l'adhérence. Lorsqu'un hyperplan  $\ker \alpha$  rencontre  $\tilde{\Upsilon}$  ailleurs qu'en 0, l'intersection est de dimension  $q - 1$  (un demi-hyperplan de  $S$ ) et dénommée *mur* de la chambre de Weyl  $\Upsilon$ . L'union des murs est le *bord*,  $\partial\Upsilon = \tilde{\Upsilon} \setminus \Upsilon$ .

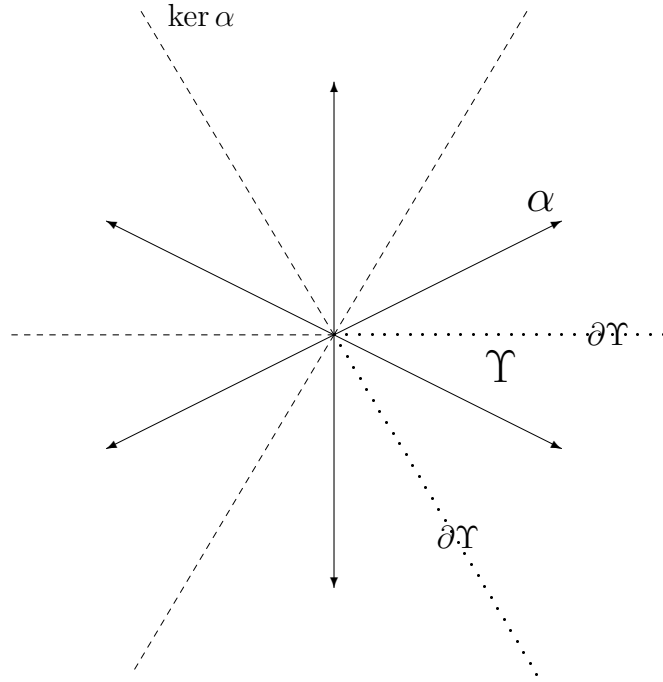
Tout ceci est plus clair avec un dessin : voir figure 1.

Un autre objet important est le groupe de Weyl. Soit  $N(T)$  le normalisateur de  $T$  dans  $G$  :  $N(T) = \{g \in G \mid gTg^{-1} = T\}$ . Le centralisateur de  $T$  (l'ensemble des  $g \in G$  qui commutent à tous les éléments de  $T$ ) est  $T$  lui-même.

**Définition 2.2.7.** — Le groupe de Weyl de  $G$  est l'ensemble  $\mathcal{W}$  des automorphismes de  $T$  qui sont la restriction d'un automorphisme intérieur :  $\mathcal{W} = \{w = \text{Inn}_g|_T \mid g \in N(T)\}$ .

On voit que  $\mathcal{W} \simeq N(T)/T$ .

FIG. 1. Racines et chambres de Weyl



Soit  $\rho : T \rightarrow GL(V)$  une représentation de  $T$ ,  $h \in N(T)$ . La représentation  $\rho' = \rho \circ Inn_g$  est équivalente à  $\rho$  via l'isomorphisme  $\rho(h)$  de  $V$ . En effet

$$\forall v \in V, \quad \rho'(g)(\rho(h)v) = \rho(hgh^{-1})\rho(h)v = \rho(h)\rho(g)v$$

La même chose est vraie au niveau infinitésimal. Par conséquent  $\rho$  et  $\rho'$  ont la même décomposition (2.8) donc quel que soit  $h \in N(T)$ ,  $Inn_h$  laisse  $\mathcal{P}(V)$  stable dans  $\mathfrak{t}^*$ . De plus on peut quotienter par  $T$  :

**Lemme 2.2.8.** — *le groupe de Weyl  $\mathcal{W}$  agit sur  $\mathcal{P}(V)$ .*

C'est-à-dire qu'il permute les poids d'une représentation. En particulier il y a la représentation adjointe :  $\mathcal{W}$  permute les racines de  $G$ . Par conséquent il permute aussi les chambres de Weyl et les murs. Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire  $\mathcal{W}$ -invariant sur  $\mathfrak{t}$ . Si on prend  $S$  l'orthogonal de  $Z(\mathfrak{g})$  dans  $\mathfrak{t}$ ,  $\mathcal{W}$  agit sur  $S$  et si on appelle  $s_\alpha$ , pour une forme

linéaire  $\alpha$  de  $S$ , la réflexion par rapport à l'hyperplan  $\ker \alpha$ , on peut montrer que  $\mathcal{W}$  est engendré dans le groupe des automorphismes de  $S$  par les  $s_\alpha$ ,  $\alpha$  parcourant  $\mathcal{R}$ . En outre il agit effectivement et transitivement sur l'ensemble des chambres de Weyl.

### Exemple

On a vu plus haut qu'on pouvait choisir comme tore maximal  $T$  de  $U(n)$  le sous-espace des matrices unitaires diagonales.

**Lemme 2.2.9.** — *Le groupe de Weyl  $\mathcal{W}$  de  $T$  est isomorphe au groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  agissant en permutant les valeurs diagonales.*

*Démonstration.* — Deux matrices conjuguées ont les mêmes valeurs propres par conséquent  $\mathcal{W}$  permute les valeurs diagonales de  $g \in T$ . De plus il n'est pas difficile de trouver une matrice  $h$  de  $U(n)$  telle que  $\text{Inn}_h$  permute effectivement deux valeurs diagonales à des places données de n'importe quel  $g \in T$ .  $\square$

Par conséquent il agit trivialement sur les multiples de l'identité. Le produit scalaire canonique associé aux coordonnées canoniques

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

est évidemment  $\mathcal{W}$ -invariant. Le sous-espace  $S$  choisi plus haut est bien l'orthogonal de  $Z(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}(1, 1, \dots, 1)$  par ce produit scalaire. Le noyau de  $\alpha = x_i - x_j$  est  $\ker \alpha = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i = x_j\}$  et la réflexion  $s_\alpha$  est l'application qui échange  $x_i$  et  $x_j$  dans les coordonnées canoniques. Bien sûr le groupe symétrique est engendré par les transpositions.

Ce qui restreint beaucoup les dispositions possibles des racines dans  $R$  et permet finalement de classifier les groupes de Lie, en regardant leur système de racines, est l'observation suivante. Le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  permet d'identifier  $S$  à  $R \simeq S^*$ . Soit  $\alpha \in \mathcal{R}$ ,  $s_\alpha$  vue comme endomorphisme de  $R$  est la réflexion par rapport à l'orthogonal de  $\alpha$ , identifié à  $\ker \alpha$ . Elle est donnée explicitement par

$$\forall \beta \in R, \quad s_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$$

Maintenant si  $\beta$  aussi est une racine,  $s_\alpha(\beta)$  est une racine et  $s_\alpha(\beta) - \beta$  est un poids (abstrait). Comme il est colinéaire à  $\alpha$ , c'est un multiple entier de  $\alpha$  :

$$n_{\alpha\beta} = \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$$

Si on note  $\widehat{(\alpha, \beta)}$  l'angle entre  $\alpha$  et  $\beta$  défini par le produit scalaire

$$n_{\alpha\beta} = 2 \frac{|\beta|}{|\alpha|} \cos \widehat{(\alpha, \beta)}$$

où  $|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ . Inversement, en partant de la racine  $\beta$  et de la réflexion associée  $s_\beta$  on définit de même  $n_{\beta\alpha} \in \mathbb{Z}$  et le produit

$$d_{\alpha\beta} = n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha} = 4 \cos^2 \widehat{(\alpha, \beta)}$$

est un entier compris entre 0 et 4. Le cas  $d_{\alpha\beta} = 4$  correspond à  $\beta = \pm\alpha$ . Les 4 autres cas 0, 1, 2, 3 correspondent à  $\cos \widehat{(\alpha, \beta)}$  égal à 0,  $\pm\frac{1}{2}$ ,  $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$  puis en retournant à  $n_{\alpha\beta}$  on détermine le rapport des normes  $\frac{|\alpha|}{|\beta|}$ . Il y a donc un petit nombre fini de cas. Chacun de ceux qui ont effectivement lieu, pour un groupe de Lie  $G$ , est décrit par un type de *diagramme de Dynkin*.

Soit la matrice carrée  $q \times q$ ,  $M = (d_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta \in \mathcal{B}}$ , pour un choix de base  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{R}$ . Le graphe de Coxeter de  $M$  est le graphe dont les sommets sont indexés par les éléments de  $\mathcal{B}$  et chaque paire de sommets distincts  $\alpha, \beta$  est liée par  $d_{\alpha, \beta}$  arêtes. Mais les nombres  $d_{\alpha, \beta}$  donnent uniquement le cosinus de l'angle  $\widehat{(\alpha, \beta)}$ , au signe près. Pour reconstituer la géométrie du système de racines il faut également des informations sur le rapport des normes de  $\alpha, \beta$  :

**Définition 2.2.10.** — *Le diagramme de Dynkin d'un système de racines  $\mathcal{R}$  est le graphe de Coxeter de  $M$ , avec une flèche  $>$  ou  $<$  sur chaque double ou triple arête dirigée vers le sommet correspondant à la racine la plus courte (de norme inférieure).*

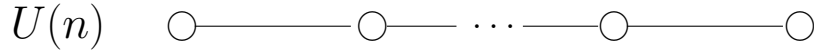
En effet dans le cas où  $d_{\alpha\beta} = 1$ , les normes sont égales :  $|\alpha| = |\beta|$ . On peut montrer que le diagramme de Dynkin ne dépend pas du choix d'une base et caractérise le système de racines puis l'algèbre de Lie (deux algèbres de Lie sont isomorphes si et seulement si les diagrammes associés sont isomorphes, au sens des graphes.)

### Exemple

On a  $\langle x_j, x_k \rangle = \delta_{jk}$ . Donc deux racines distinctes  $\alpha = x_j - x_{j+1}$  et  $\beta = x_k - x_{k+1}$  de la base  $\mathcal{B}$  ont un produit scalaire non nul si et seulement si  $j$  et  $k$  sont deux entiers consécutifs. Dans ce cas  $d_{\alpha, \beta} = 1$ . De fait les normes sont égales et l'angle  $\widehat{(\alpha, \beta)}$  vaut  $\frac{2\pi}{3}$ . Le diagramme de Dynkin de  $U(n)$  est alors celui dessiné à la figure 2.

Retournons à une représentation quelconque  $V$  de  $G$ . Les poids nous intéressent aussi parce qu'ils permettent d'indexer de façon univoque les représentations de  $G$ . Pour cela il

FIG. 2. Diagramme de Dynkin



faut choisir une chambre de Weyl qu'on appellera *chambre fondamentale* et qu'on notera  $\Gamma$ . Il y a une bijection entre les chambres de Weyl et les bases de  $\mathcal{R}$ . Autrement dit il y a une (unique) chambre fondamentale  $\Gamma$  associée à  $\mathcal{B}$ . Soit  $\alpha \in R$ ,  $\mathcal{P}_\alpha$  est un demi-plan limité par  $\ker \alpha$  :

$$\mathcal{P}_\alpha = \{v \in \mathfrak{t} \mid \langle \alpha, v \rangle > 0\}$$

Alors on pose

$$\Gamma = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{B}} \mathcal{P}_\alpha = \{v \in \mathfrak{t} \mid \forall \alpha \in \mathcal{B}, \langle \alpha, v \rangle > 0\}$$

### Exemple

Soit  $\alpha = x_j - x_k$ . Le demi-plan  $\mathcal{P}_\alpha$  est l'ensemble des  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{t}$  tels que  $x_j > x_k$  lorsque  $j < k$  (i.e.  $\alpha \in \mathcal{R}^+$ ) ou  $x_j < x_k$  si  $j > k$  ( $\alpha \in \mathcal{R}^-$ ). Alors la chambre fondamentale associée à notre choix de base est

$$\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 > x_2 > \dots > x_n\}$$

On a aussi

$$\bar{\Gamma} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n\}$$

Maintenant l'ensemble des poids de  $V$  est une union disjointe d'orbites de  $\mathcal{W}$  et comme le groupe de Weyl agit effectivement et transitivement sur les chambres de Weyl, chaque orbite a un et un seul élément dans l'adhérence de la chambre fondamentale :

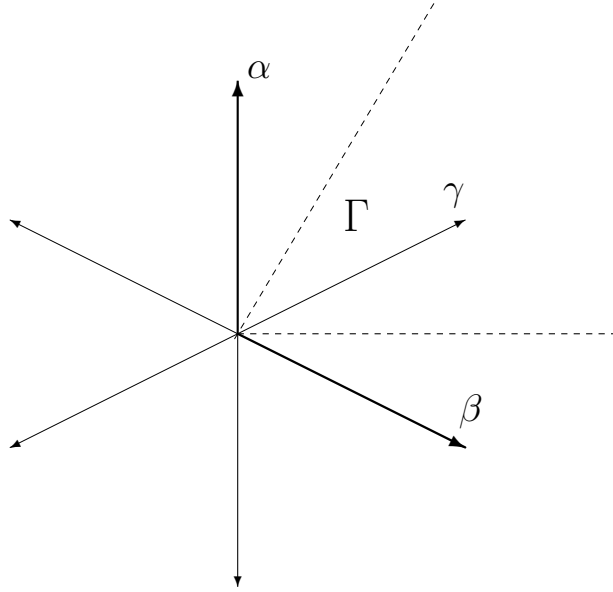
$$\mathcal{P}(V) = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{P}(V) \cap \bar{\Gamma}} \mathcal{W}_\alpha$$

En outre on a une relation d'ordre sur les orbites. Soit  $\mathcal{O}$  une orbite de  $\mathcal{W}$  dans  $V$ . On note  $\text{Conv}(\mathcal{O})$  l'enveloppe convexe de  $\mathcal{O}$ . Alors pour deux orbites  $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$  on définit :

$$\mathcal{O} \preceq \mathcal{O}' \iff \text{Conv}(\mathcal{O}) \subseteq \text{Conv}(\mathcal{O}')$$

**Proposition et définition 2.2.11.** — Soit  $G$  un groupe de Lie compact, connexe.

(i) Pour chaque représentation irréductible  $V$  de  $G$ , il existe une unique orbite de  $\mathcal{W}$  dans  $\mathcal{P}(V)$  maximale pour la relation  $\preceq$ . Le poids  $\gamma$  de cette orbite dans l'adhérence  $\bar{\Gamma}$  de la

FIG. 3. Base et chambre fondamentale de  $U(n)$ 

chambre fondamentale est appelé poids dominant de la représentation irréductible  $V$ . Sa multiplicité est 1.

(ii) Deux représentations irréductibles de  $G$  avec le même poids dominant sont équivalentes.

(iii) A tout poids dans  $\bar{\Gamma}$  correspond une représentation irréductible de  $G$ .

### Exemples

Pour la représentation usuelle  $\lambda^{1,0}$  de  $U(n)$  sur  $\mathbb{C}^n$ , la décomposition en composantes irréductibles (2.8) de la représentation de  $T$  est donnée par la base canonique. Les poids associés sont les  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  et le poids dominant est  $x_1 = (1, 0, \dots, 0)$ .

L'ensemble des poids de la représentation adjointe de  $U(n)$  ne contient que deux orbites :  $\{0\}$  et  $\mathcal{R}$ . L'unique racine dans  $\Gamma$  :  $\gamma = (1, 0, \dots, 0, -1)$  est le poids dominant. Mais  $\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}}$  n'est pas irréductible. En effet le centre  $Z(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{R}$  est invariant ( $ad$  vaut 0 sur  $Z(\mathfrak{g})$ ). Autrement dit,  $\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}}$  est isomorphe à l'espace des formes de types (1,1), qui contient l'élément invariant  $\omega$ . Alors

$$\lambda^{1,1} = \lambda_0^{1,1} \oplus \mathbb{R}\omega$$



où  $\lambda_0^{1,1} = [1, 0, \dots, 0, -1]$  est irréductible. Plus de détails seront donnés au chapitre 3.

Plus généralement, quels que soient  $p, q \geq 1$ , on définit l'application équivariante

$$\begin{aligned} L : \lambda^{p-1, q-1} &\rightarrow \lambda^{p, q} \\ \alpha &\mapsto \omega \wedge \alpha \end{aligned}$$

**Définition 2.2.12.** — *L'espace des formes primitives de type  $(p, q)$ , noté  $\lambda_0^{p, q}$ , est l'orthogonal de l'image de  $L$  dans  $\lambda^{p, q}$ .*

Lorsque  $p + q \leq n$ , l'application  $L$  est injective, par conséquent

$$\lambda^{p, q} \simeq \lambda_0^{p, q} \oplus \lambda^{p-1, q-1}$$

et on peut montrer que  $\lambda_0^{p, q}$  est la représentation irréductible de  $U(n)$  de poids dominant

$$\underbrace{(1, \dots, 1)}_p, 0, \dots, 0, \underbrace{(-1, \dots, -1)}_q$$

Finalement, pour  $p + q \leq n$ ,  $p \geq q$ ,

$$\lambda^{p, q} \simeq \lambda_0^{p, q} \oplus \lambda^{p-1, q-1} \oplus \dots \oplus \lambda^{p-q, 0}$$

En particulier  $\lambda_0^{p, q}$  est la *composante primitive* – la composante irréductible de plus grande dimension – de  $\lambda^{p, q}$ . Pour  $p + q > n$  en revanche  $\lambda_0^{p, q} = \{0\}$ .

On définit aussi

$$\sigma^{p, q} = \odot^p \lambda^{1, 0} \otimes \odot^q \lambda^{0, 1}$$

par analogie à (3.4). Si  $p = 0$  ou  $q = 0$ ,  $\sigma^{p, q}$  est irréductible mais lorsque  $p, q \geq 1$ , on note  $\sigma_0^{p, q}$  la composante primitive de  $\sigma^{p, q}$ , de poids dominant  $(p, 0, \dots, 0, -q)$ .

### 2.3. Décomposition irréductible des produits tensoriels

Désormais on indique entre parenthèse après le nom d'une représentation son poids dominant si elle est irréductible :  $V(\gamma)$ , ou même simplement  $[\gamma]$ . Soient donc  $V(\gamma)$  et  $W(\lambda)$  deux représentations irréductibles de  $G$ . Le poids  $\gamma + \lambda \in \bar{\Gamma}$  est le poids dominant d'une représentation irréductible, appelée *produit de Cartan* de  $V$  et  $W$  qu'on peut voir comme un sous-espace de  $V \otimes W$ . Plus généralement, on obtient *tous* les poids de  $V \otimes W$  en additionnant n'importe quel poids de  $V$  à n'importe quel poids de  $W$ . Cependant si on cherche la décomposition en composantes irréductibles de  $V \otimes W$

$$(2.11) \quad V \otimes W = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} (V \otimes W)^\alpha$$

où les  $(V \otimes W)^\alpha$  sont les composantes isotypiques

$$(V \otimes W)^\alpha \simeq m_\alpha[\alpha]$$

on n'est intéressé, parmi les poids de  $V \otimes W$ , que par les poids dominants des représentations intervenant dans (2.11) c'est-à-dire par le sous-ensemble  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{P}(V \otimes W) \cap \bar{\Gamma}$ , ainsi que par les multiplicités  $m_\alpha$ . Ce que dit Salamon ([48], p81, voir les références données par l'auteur) c'est qu'on peut les obtenir uniquement en manipulant la liste des  $\gamma + \beta$ ,  $\beta \in \mathcal{P}(W)$  i.e. on a besoin de connaître tous les poids d'une représentation sur deux seulement. La méthode n'est cependant pas directe : non seulement  $\gamma + \beta$  n'appartient pas généralement à  $\bar{\Gamma}$  mais il ne suffit pas de prendre le poids de l'orbite correspondante  $W(\gamma + \beta)$  dans la chambre fondamentale  $\Gamma$ . Ce qu'il faut faire est très bien résumé par le schéma à la page 82 de [48]. On le rappelle brièvement.

Avant tout on définit la quantité utile

$$h = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \alpha$$

Elle vérifie  $\beta \in \bar{\Gamma}$  si et seulement si  $\beta + h \in \Gamma$ . D'autre part, on associe à tout élément  $w$  de  $\mathcal{W}$  son signe  $\varepsilon(w) = \pm 1$  selon qu'il est engendré par un nombre pair ou impair de réflexions  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{R}$ .

A présent, soit  $\beta \in \mathcal{P}(W)$ . On associe au poids  $\gamma + \beta$  un poids  $\alpha \in \mathcal{D}$  si et seulement si il existe  $w \in \mathcal{W}$  tel que  $w(\gamma + \beta + h) \in \Gamma$ . Alors  $\alpha = w(\gamma + \beta + h) - h \in \bar{\Gamma}$ . L'ensemble des  $\beta$  qui le vérifient est noté  $\mathcal{P}'(W)$ . Comme  $\mathcal{W}$  agit effectivement et transitivement sur les chambres de Weyl,  $w$  lorsqu'il existe est unique. Plusieurs cas se présentent.

1) Si  $\gamma + \beta \in \Gamma$ , c'est tel quel le poids dominant d'une représentation irréductible de la décomposition de  $V \otimes W$  :  $\alpha = \gamma + \beta \in \mathcal{D}$  mais il reste à calculer la multiplicité  $m_\alpha$ . Dans ce cas  $w$  est l'identité.

2) Si  $\gamma + \beta + h$  n'appartient pas à  $\Gamma$ , comme en 1), mais à  $\partial\Gamma$ , pour tout  $w \in \mathcal{W}$ ,  $w(\gamma + \beta + h)$  appartiendra au mieux à un autre mur de  $\Gamma$  donc  $w(\gamma + \beta + h) - h \notin \bar{\Gamma}$ . Par conséquent il faut rejeter ce poids :  $\beta \notin \mathcal{P}'(W)$ .

3) Si  $\gamma + \beta + h \notin \bar{\Gamma}$  alors il existe un unique  $w$  tel que  $w(\gamma + \beta + h) \in \bar{\Gamma}$  et de deux choses l'une :

a) si  $\gamma + \beta + h$  appartenait à un mur,  $w(\gamma + \beta + h) \in \partial\Gamma$  et on est ramené au cas 2).

b) mais s'il appartenait à l'intérieur d'une chambre,  $w(\gamma + \beta + h) \in \Gamma$  comme on souhaite.

Finalement on a la formule pour calculer les multiplicités :

$$\forall \alpha \in \mathcal{D}, \quad m_\alpha = \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{P}'(W) \\ w(\gamma + \beta + h) - h = \alpha}} \varepsilon(w) \text{mult}(\beta)$$

On va maintenant présenter quelques décompositions calculées par cette méthode. Comme Salamon on abrègera assez clairement  $\beta \in \mathcal{P}'(W)$  en  $\surd$  et  $\beta \notin \mathcal{P}'(W)$  en  $\times$ .

### Exemples

D'abord on calcule  $h$  pour  $U(n)$  :

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j < k \leq n} (x_j - x_k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j < n} \sum_{j < k \leq n} (x_j - x_k) \\ &= \frac{1}{2} (n-1, (n-2) - 1, (n-3) - 2, \dots, -(n-1)) \\ &= \frac{1}{2} (n-1, n-3, \dots, -n+1) \end{aligned}$$

Notons que la différence entre deux coordonnées consécutives de  $h$  est 1. Soit un poids  $\alpha = (d_1, \dots, d_n)$  tel qu'il existe  $j$  tel que  $d_{j+1} - d_j = 1$ . Alors les coordonnées de  $\alpha + h = (d'_1, \dots, d'_n)$  vérifient  $d'_{j+1} = d'_j$  c'est-à-dire que  $\alpha + h$  appartient à un mur. Par conséquent si ce poids,  $\alpha$  apparaît dans la liste de la somme des poids de  $V$  et  $W$ , il est à rejeter, par 2) ou 3)a) ci-dessus.

On cherche à décomposer  $\Lambda^1 \otimes [\lambda^{1,1}]$  :

$$[[\lambda^{1,0}]] \otimes [\lambda^{1,1}] = [[\lambda^{1,0} \otimes \lambda^{1,1}]]$$

Il existe un sous-espace  $U^2$ ,  $U(n)$ -invariant tel que

$$\lambda^{1,0} \otimes \lambda^{1,1} = \lambda^{2,1} \oplus U^2$$

**Lemme 2.3.1.** — Soit  $n \geq 3$ . Soit  $U_0^2$  la composante primitive de  $U^2$ . La décomposition

$$(2.12) \quad \Lambda^1 \otimes [\lambda^{1,1}] \simeq [[\lambda_0^{2,1}]] \oplus [[U_0^2]] \oplus 2\Lambda^1$$

est la décomposition en composantes irréductibles de la représentation de  $U(n)$ . Pour  $n = 2$ , la décomposition reste valable mais  $[[\lambda_0^{2,1}]] = \{0\}$ .

*Démonstration.* — On connaît les poids de la représentation adjointe  $\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} \simeq \lambda^{1,1}$ . Cependant cette représentation n'est pas irréductible. Pour appliquer la méthode de Salamon on doit plutôt regarder  $\lambda_0^{1,1}$ , de poids dominant  $(1, 0, \dots, 0, -1)$ . On sait que

$$\lambda^{1,0} \otimes \lambda^{1,1} \simeq \lambda^{1,0} \oplus \lambda^{1,0} \otimes \lambda_0^{1,1}$$

Pour plus de clarté on fixe  $n = 4$ .

$\beta$	$\gamma + \beta$	$\gamma + \beta + h$	$\alpha$
$(1, 0, 0, 0)$	$(2, 0, 0, -1)\checkmark$		$(2, 0, 0, -1)$
$(0, 1, 0, 0)$	$(1, 1, 0, -1)\checkmark$		$(1, 1, 0, -1)$
$(0, 0, 1, 0)$	$(1, 0, 1, -1)$	$(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}) \times$	
$(0, 0, 0, 1)$	$(1, 0, 0, 0)\checkmark$		$(1, 0, 0, 0)$

On a bien

$$[1, 0, 0, 0] \oplus [1, 0, 0, -1] = [2, 0, 0, -1] \oplus [1, 1, 0, -1] \oplus [1, 0, 0, 0] = U_0^2 \oplus \lambda_0^{2,1} \oplus \lambda^{1,0}$$

□

La représentation  $U_0^2$  est par définition la représentation irréductible de  $U(n)$  de poids dominant  $(2, 0, \dots, 0, -1)$  c'est-à-dire  $\sigma_0^{2,1}$  et  $\llbracket U^2 \rrbracket \simeq \llbracket \sigma^{2,1} \rrbracket$ .

L'espace abstrait des tenseurs de courbure hermitienne est  $\Lambda^2 \otimes [\lambda^{1,1}]$  (l'endomorphisme  $\tilde{R}_{X,Y}$  commute à  $J$  quels que soient les vecteurs  $X$  et  $Y$ ). On le décompose en composantes irréductibles. On a premièrement

$$\Lambda^2 \otimes [\lambda^{1,1}] = \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket \otimes [\lambda^{1,1}] \oplus [\lambda^{1,1}] \otimes [\lambda^{1,1}]$$

Puis

**Proposition 2.3.2.** — Soient  $V^1$  la représentation irréductible de  $U(n)$  de poids dominant  $(2, 0, \dots, 0, -1, -1)$  et  $V^2 = [2, 1, 0, \dots, 0, 1]$ . Pour  $n \geq 4$ , les décompositions

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket \otimes [\lambda^{1,1}] &= \llbracket \lambda^{2,0} \otimes \lambda^{1,1} \rrbracket \\ &\simeq \llbracket \lambda_0^{3,1} \rrbracket \oplus \llbracket V^2 \rrbracket \oplus 2\llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket \oplus \llbracket \sigma^{2,0} \rrbracket \end{aligned}$$

et

$$(2.14) \quad \begin{aligned} [\lambda^{1,1}] \otimes [\lambda^{1,1}] &= [\lambda^{1,1} \otimes \lambda^{1,1}] \\ &\simeq [\lambda_0^{2,2}] \oplus \llbracket V^1 \rrbracket \oplus [\sigma_0^{2,2}] \oplus 4[\lambda_0^{1,1}] \oplus 2\mathbb{R} \end{aligned}$$

sont les décompositions en composantes irréductibles des représentations de  $U(n)$ . Pour  $n = 3$  ces décompositions deviennent

$$(2.15) \quad [\lambda^{2,0}] \otimes [\lambda^{1,1}] \simeq [V^2] \oplus 2[\lambda^{2,0}] \oplus [\sigma^{2,0}]$$

et

$$(2.16) \quad [\lambda^{1,1}] \otimes [\lambda^{1,1}] \simeq [V^1] \oplus [\sigma_0^{2,2}] \oplus 4[\lambda_0^{1,1}] \oplus 2\mathbb{R}$$

Enfin pour  $n = 2$ ,  $[V^1]$  et  $[V^2]$  sont en outre réduits à 0.

*Démonstration.* — On doit démontrer, au niveau des représentations complexes,

$$\lambda^{2,0} \otimes \lambda_0^{1,1} \simeq \lambda_0^{3,1} \oplus V^2 \oplus \lambda^{2,0} \oplus \sigma^{2,0}$$

et

$$\lambda_0^{1,1} \otimes \lambda_0^{1,1} \simeq \lambda_0^{2,2} \oplus V^1 \oplus \bar{V}^1 \oplus \sigma_0^{2,2} \oplus 2\lambda_0^{1,1} \oplus \mathbb{R}$$

On prend  $n = 4$  (pour  $n > 4$  les démonstrations sont similaires).

On connaît tous les poids de  $\lambda_0^{1,1}$  et le poids dominant de  $\lambda^{2,0} : (1, 1, 0, 0)$ . On peut donc appliquer l'algorithme de décomposition des produits tensoriels :

$$\begin{array}{llll}
(1, 0, 0, -1) & (2, 1, 0, -1)\sqrt{} & & (2, 1, 0, -1) \\
(1, 0, -1, 0) & (2, 1, -1, 0) & (\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})\times & \\
(1, -1, 0, 0) & (2, 0, 0, 0)\sqrt{} & & (2, 0, 0, 0) \\
(0, 1, 0, -1) & (1, 2, 0, -1) & (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})\times & \\
(0, 1, -1, 0) & (1, 2, -1, 0) & (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})\times & \\
(-1, 1, 0, 0) & (0, 2, 0, 0) & (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) & -(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) \quad -(1, 1, 0, 0) \\
(0, 0, 1, -1) & (1, 1, 1, -1)\sqrt{} & & (1, 1, 1, -1) \\
(0, -1, 1, 0) & (1, 0, 1, 0) & (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2})\times & \\
(-1, 0, 1, 0) & (0, 1, 1, 0) & (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2})\times & \\
(0, 0, -1, 1) & (1, 1, -1, 1) & (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) & -(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) \quad -(1, 1, 0, 0) \\
(0, -1, 0, 1) & (1, 0, 0, 1) & (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\times & \\
(-1, 0, 0, 1) & (0, 1, 0, 1) & (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\times & \\
3(0, 0, 0, 0) & 3(1, 1, 0, 0)\sqrt{} & & 3(1, 1, 0, 0)
\end{array}$$

En particulier la multiplicité de  $\lambda^{2,0} = [1, 1, 0, 0]$  est  $3 - 1 - 1 = 1$ . Les autres composantes sont  $V^2 = [2, 1, 0, -1]$ , le produit de Cartan de  $\lambda^{1,1}$  et  $\lambda^{2,0}$ ,  $\sigma^{2,0} = [2, 0, 0, 0]$  et  $\lambda_0^{3,1} = [1, 1, 1, -1]$ . Le facteur 3 à la dernière ligne correspond à la multiplicité du poids 0 dans la représentation  $\lambda_0^{1,1}$ , strictement supérieure à 1 dès que  $n > 2$ . On sait que le tore maximal

de  $U(n)$  est de dimension  $n$  donc  $\mathfrak{u}(n)_0$  est de dimension complexe  $n$  mais  $\lambda_0^{1,1} \simeq \mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}$  donc  $\text{mult}(0) = n - 1$ .

En ce qui concerne la deuxième décomposition,

$$\begin{array}{llll}
(1, 0, 0, -1) & (2, 0, 0, -2)\sqrt{ } & & (2, 0, 0, -2) \\
(1, 0, -1, 0) & (2, 0, -1, -1)\sqrt{ } & & (2, 0, -1, -1) \\
(1, -1, 0, 0) & (2, -1, 0, -1) & (\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) \times & \\
(0, 1, 0, -1) & (1, 1, 0, -2)\sqrt{ } & & (1, 1, 0, -2) \\
(0, 1, -1, 0) & (1, 1, -1, -1)\sqrt{ } & & (1, 1, -1, -1) \\
(-1, 1, 0, 0) & (0, 1, 0, -1) & (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}) \times & \\
(0, 0, 1, -1) & (1, 0, 1, -2) & (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2}) \times & \\
(0, -1, 1, 0) & (1, -1, 1, -1) & (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}) & -(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}) \quad -(1, 0, 0, -1) \\
(-1, 0, 1, 0) & (0, 0, 1, -1) & (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}) \times & \\
(0, 0, -1, 1) & (1, 0, -1, 0) & (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) \times & \\
(0, -1, 0, 1) & (1, -1, 0, 0) & (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) \times & \\
(-1, 0, 0, 1) & (0, 0, 0, 0)\sqrt{ } & & (0, 0, 0, 0) \\
3(0, 0, 0, 0) & 3(1, 0, 0, -1)\sqrt{ } & & 3(1, 0, 0, -1)
\end{array}$$

On identifie :  $\lambda_0^{1,1}$  est de multiplicité  $3 - 1 = 2$ ,  $\sigma_0^{2,2} = [2, 0, 0, -2]$ ,  $V^1 = [2, 0, -1, -1]$  par définition et  $\bar{V}^1 = [1, 1, 0, -2]$ . En effet le représentant de l'orbite de  $(-2, 0, 1, 1) = -(2, 0, -1, -1)$  dans la chambre fondamentale  $\bar{\Gamma}$  est  $(1, 1, 0, -2)$ . Enfin  $\lambda_0^{2,2} = [1, 1, -1, -1]$  n'est pas défini lorsque  $n = 3$  et  $[0, 0, 0, 0]$  est isomorphe à  $\mathbb{R}$ .

□

Afin de caractériser  $V^1$  on remarque que  $\lambda^{2,2}$ ,  $\sigma^{2,2}$  sont inclus dans le produit symétrique. En fait

$$(2.17) \quad \odot^2[\lambda^{1,1}] = \lambda^{2,2} \oplus \sigma^{2,2}$$

Or

$$\begin{aligned}
\lambda^{2,2} &\simeq \lambda_0^{2,2} \oplus \lambda_0^{1,1} \oplus \mathbb{R} \\
\sigma^{2,2} &\simeq \sigma_0^{2,2} \oplus \lambda_0^{1,1} \oplus \mathbb{R}
\end{aligned}$$

car  $\sigma_0^{1,1} = \lambda_0^{1,1} = [1, 0, \dots, 0, -1]$ . On en déduit

$$\wedge^2 \lambda^{1,1} \simeq \llbracket V^1 \rrbracket \oplus 2[\lambda_0^{1,1}]$$

D'autre part on déduit de (2.17) :

**Lemme 2.3.3.** — *L'espace abstrait des tenseurs de courbure kähleriens se décompose en composantes irréductibles pour  $U(n)$  en*

$$(2.18) \quad \mathcal{K}(\mathfrak{u}(n)) \simeq [\sigma_0^{2,2}] \simeq [\sigma_0^{2,2}] \oplus [\lambda_0^{1,1}] \oplus \mathbb{R}$$

*De plus, l'espace des tenseurs de courbure riemannienne des variétés à holonomie contenue dans  $SU(n)$  (les variétés de Calabi-Yau) est isomorphe en tout point à*

$$(2.19) \quad \mathcal{K}(\mathfrak{su}(n)) \simeq [\sigma_0^{2,2}]$$

*Démonstration.* — En effet,

$$\mathcal{K}(\mathfrak{u}(n)) \subset \odot^2(\Lambda^2) \cap \Lambda^2 \otimes \mathfrak{u}(n) = \odot^2[\lambda^{1,1}]$$

Maintenant l'intersection de  $\Lambda^4$  avec  $\odot^2[\lambda^{1,1}]$  est évidemment  $[\lambda^{2,2}]$  et par la proposition 1.2.31 on a (2.18).

Pour la deuxième partie du lemme,  $\mathfrak{su}(n) \simeq [\lambda_0^{1,1}]$  d'où

$$\mathcal{K}(\mathfrak{su}(n)) = \mathcal{K}(\mathfrak{u}(n)) \cap \odot^2[\lambda_0^{1,1}] = [\sigma_0^{2,2}]$$

□





## CHAPITRE 3

### VARIÉTÉS PRESQUE HERMITIENNES

#### 3.1. Variétés complexes, variétés presque complexes

Le groupe  $GL(n, \mathbb{C})$  est le groupe des endomorphismes complexes de  $\mathbb{C}^n$ , soit des matrices carrées de taille  $n \times n$  à coefficients complexes. Mais  $\mathbb{C}^n$  peut-être vu aussi comme  $\mathbb{R}^{2n}$  par

$$(3.1) \quad (z_1, \dots, z_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad z_j = x_j + iy_j$$

Alors la multiplication par  $i$  est l'endomorphisme de carré  $-1$

$$(3.2) \quad J : (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \mapsto (-y_1, \dots, -y_n, x_1, \dots, x_n)$$

et le groupe  $GL(n, \mathbb{C})$  est l'ensemble des endomorphismes  $\mathbb{R}$ -linéaires de  $\mathbb{R}^{2n}$  qui préservent  $J$ . Le plongement est donné au niveau des matrices par

$$A + iB \mapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

Soit  $M$  une variété réelle de dimension paire  $m = 2n$ . Par le lemme 1.1.6, une réduction du fibré des repères à  $GL(n, \mathbb{C})$ , notée  $GL(M, \mathbb{C})$ , est la donnée (différentiable) d'un endomorphisme  $J_x$  de carré  $-1$  de chaque espace tangent  $T_x M$ . Le champ de tenseurs  $J$  est appelé *structure presque complexe* de  $M$ . Les repères appartenant à  $GL(M, \mathbb{C})$  sont ceux de la forme  $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n\}$  avec,  $\forall j = 1, \dots, n$ ,  $Y_j = JX_j$ .

La représentation complexe usuelle de  $GL(n, \mathbb{C})$  sur  $\mathbb{C}^n$  engendre le fibré vectoriel complexe associé  $T^{1,0}$ . Quant à la représentation conjuguée elle est associée à  $T^{0,1}$ . On peut voir  $T^{1,0}$  et  $T^{0,1}$  comme des sous-fibrés de  $T^{\mathbb{C}}M = TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ . Pour cela, on étend  $J$  à  $T^{\mathbb{C}}M$  par  $\mathbb{C}$ -linéarité. Alors  $T_x^{1,0}$  en tout point  $x \in M$  est le sous-espace propre de  $J_x$  pour

la valeur propre  $i$  et  $T_x^{0,1}$  est le sous-espace propre pour la valeur  $-i$ .

$$(3.3) \quad T^{\mathbb{C}}M = T^{1,0} \oplus T^{0,1}$$

Puisque  $GL(n, \mathbb{C})$  est défini dans  $GL(m, \mathbb{R})$  comme l'ensemble des endomorphismes qui commutent à  $J$ , il préserve ses sous-espaces propres.

Soit  $X$  un vecteur complexe, on note  $X^{1,0}$ ,  $X^{0,1}$  les composantes de  $X$  dans la décomposition (3.3). Comme  $J^2 = -Id$ , les projections sont données par  $X^{1,0} = \frac{1}{2}(X - iJX)$ , et  $X^{0,1} = \frac{1}{2}(X + iJX)$ . En particulier

$$\begin{array}{ccc} TM & \rightarrow & T^{1,0} \\ X & \mapsto & X - iJX \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} TM & \rightarrow & T^{0,1} \\ X & \mapsto & X + iJX \end{array}$$

sont des isomorphismes.

De même les représentations duales de  $GL(n, \mathbb{C})$  sur  $(\mathbb{C}^n)^*$  et  $(\overline{\mathbb{C}^n})^*$  donnent naissance aux fibrés  $\lambda^{1,0}$  et  $\lambda^{0,1}$ , qu'on peut voir comme les sous-espaces propres de  $J$ , agissant sur  $\lambda^1 = \Lambda_{\mathbb{C}}^1$  par  $J\alpha(X) = -\alpha(JX)$  :

$$\lambda^1 = \lambda^{1,0} \oplus \lambda^{0,1}$$

Plus généralement on pose

$$(3.4) \quad \lambda^{p,q} = \bigwedge^p \lambda^{1,0} \otimes \bigwedge^q \lambda^{0,1}$$

l'ensemble des *formes complexes de type*  $(p, q)$ . Alors

$$\lambda^r = \bigoplus_{p+q=r} \lambda^{p,q}$$

Maintenant  $J$  est un endomorphisme inversible de  $TM$ , d'inverse  $-J$ . Il peut donc agir sur les fibrés de tenseurs par (1.5) ou (1.6). Pour des  $p$ -formes (même complexes) l'action de  $J$  comme section du fibré adjoint  $\mathfrak{gl}(M, \mathbb{C})$  est donnée par (1.8). Alors  $\lambda^{p,q}$  est caractérisée dans  $\lambda^r$ ,  $r = p + q$  par

$$\forall \alpha \in \lambda^{p,q}, \quad J.\alpha = i(p - q)\alpha$$

Alternativement  $\lambda^{1,0}$  (resp.  $\lambda^{0,1}$ ) est l'ensemble des 1-formes complexes qui annulent  $T^{0,1}$  (resp.  $T^{1,0}$ ) :

$$\alpha \in \lambda^{1,0} \quad \text{ssi} \quad \forall X \in TM, \quad \alpha(X + iJX) = 0$$

et  $\lambda^{p,q}$  est l'ensemble des formes complexes qui s'annulent si on les applique à  $p+1$  vecteurs de type  $(1,0)$  ou  $q+1$  vecteurs de type  $(0,1)$ .

Il y a des variétés qui ont une structure  $GL(n, \mathbb{C})$  naturelle : les variétés complexes (ou les variétés réelles sous-jacentes d'une variété complexe). Dans ce cas la structure presque

complexe est la multiplication par  $i$  sur chaque espace tangent. Mais cette structure  $GL(n, \mathbb{C})$  n'est pas quelconque.

Les cartes complexes de  $M$  sont des fonctions holomorphes donc elles fournissent des sections de  $GL(M, \mathbb{C})$ , localement autour de tout point de  $M$  par (1.11). Réciproquement

**Lemme 3.1.1.** — *Une variété admet une structure  $GL(n, \mathbb{C})$  intégrable si et seulement si elle est complexe.*

*Démonstration.* — Soit  $s$  une section intégrable de  $GL(M, \mathbb{C})$ , définie autour d'un point  $x \in M$ , associée à une carte  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ . La différentielle de  $s$  doit vérifier  $D\varphi \circ J = J \circ D\varphi$  ou en identifiant  $\mathbb{R}^{2n}$  à  $\mathbb{C}^n$  comme en (3.1),

$$D\varphi \circ J = iD\varphi$$

Puis si  $(\varphi, U)$ ,  $(\varphi', U')$  sont deux telles cartes, quel que soit  $x \in \varphi(U \cap U')$ ,  $D(\varphi^{-1} \circ \varphi')(x)$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire donc  $\varphi^{-1} \circ \varphi' : \varphi(U \cap U') \rightarrow \varphi'(U \cap U')$  est une application holomorphe. Par conséquent à partir d'une structure  $GL(n, \mathbb{C})$  intégrable on peut construire un atlas de variété complexe sur  $M$ .  $\square$

Soit  $s = \{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n\}$  une section de  $GL(M)$ ,  $s^*\tau = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ . On pose  $Z_j = X_j - iY_j \in T^{\mathbb{C}}M$  et  $z_j = x_j + iy_j \in \lambda^1$ . Alors  $s$  est une section de  $GL(M, \mathbb{C})$  si et seulement si quel que soit  $j = 1, \dots, n$ ,  $Y_j = JX_j$  c'est-à-dire  $Z_j \in T^{1,0}$  ou encore  $z_j \in \lambda^{1,0}$ . De plus par le lemme 1.1.7,  $s$  est intégrable si et seulement si  $d(s^*\tau) = 0$ . Par conséquent,

**Lemme 3.1.2.** — *Soit  $M$  une variété de dimension  $m = 2n$  munie d'une  $GL(n, \mathbb{C})$ -structure  $GL(M, \mathbb{C})$ . Elle est intégrable si et seulement si on peut trouver, au voisinage de chaque point,  $n$  formes fermées de type  $(1, 0)$  linéairement indépendantes.*

Dans un tel co-repère, toute 1-forme  $\alpha \in \lambda^{1,0}$  s'écrit

$$\alpha = f_1 z_1 + \dots + f_n z_n$$

pour des fonctions  $f_j : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Alors

$$d\alpha = df_1 \wedge z_1 + \dots + df_n \wedge z_n$$

d'où, puisque  $df_j \in \lambda^1$  pour tout  $j = 1, \dots, n$  est la somme d'une forme de type  $(1, 0)$  et d'une forme de type  $(0, 1)$ ,  $d\alpha \in \lambda^{2,0} \oplus \lambda^{1,1}$ .

Donc si  $\alpha$  est de type  $(1, 0)$ , i.e.

$$\forall X \in T^{0,1}, \quad \alpha(X) = 0$$

quels que soient  $X, Y \in T^{0,1}$ ,

$$(3.5) \quad 0 = d\alpha(X, Y) = -\alpha([X, Y])$$

Autrement dit, puisque (3.5) est valable pour toute forme  $\alpha \in \lambda^{1,0}$ ,  $GL(M, \mathbb{C})$  est intégrable si et seulement si

$$(3.6) \quad \forall X, Y \in T^{0,1}, \quad [X, Y] \in T^{0,1}$$

c'est-à-dire ssi la distribution  $T^{0,1}$  est intégrable dans  $T^{\mathbb{C}}M$  par le théorème de Frobenius.

Soient  $X, Y \in TM$ . La partie de type  $(1, 0)$  de  $[X^{0,1}, Y^{0,1}]$  est donnée par

$$(3.7) \quad \begin{aligned} [X^{0,1}, Y^{0,1}]^{1,0} &= \frac{1}{4}(Id - iJ)[X + iJX, Y + iJY] \\ &= N(X, Y) - iJN(X, Y) \end{aligned}$$

où

**Définition 3.1.3.** — *Le tenseur  $N$  est le tenseur de Nijenhuis de  $J$ . Il est défini par*

$$(3.8) \quad N(X, Y) = \frac{1}{4}([JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y])$$

Il mesure l'intégrabilité à l'ordre 1 de la structure presque complexe mais d'après le théorème de Newlander, Nirenberg [44], on a en fait que  $J$  est intégrable si et seulement si  $N = 0$ .

En résumé :

**Proposition 3.1.4.** — *Soit  $M$  une variété de dimension  $m = 2n$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $GL(M, \mathbb{C})$  définie par  $J$  est intégrable.
- (ii) Quelle que soit  $\alpha \in \lambda^{1,0}$ ,  $(d\alpha)^{0,2} = 0$ .
- (iii) Les distributions  $T^{1,0}$  ou  $T^{0,1}$  sont intégrables.
- (iv) Le tenseur de Nijenhuis  $N$  est nul.

Les points (ii) à (iv) sont équivalents par ce qui précède. En revanche (i) est plus forte a priori. Que (iv) implique finalement (i) est précisément le contenu du théorème de Newlander, Nirenberg.

Soit  $\alpha \in \lambda^{1,0}$ , quels que soient  $X, Y \in T^{\mathbb{C}}M$ ,

$$(3.9) \quad (d\alpha)^{0,2}(X, Y) = d\alpha(X^{0,1}, Y^{0,1}) = -\alpha([X^{0,1}, Y^{0,1}]) = -\alpha(N(X, Y))$$

en combinant (3.5), (3.7) (en étendant  $N$  à  $T^{\mathbb{C}}M$  par  $\mathbb{C}$ -linéarité). On a bien  $(d\alpha)^{2,0} = 0$  pour toute forme  $\alpha \in \lambda^{1,0}$  ssi  $N = 0$ . Par là le tenseur  $N$  peut-être vu comme un élément de  $Hom(\lambda^{1,0}, \lambda^{0,2}) \simeq \lambda^{0,1} \otimes \lambda^{0,2}$ , ou autrement dit le tenseur *réel*  $N$  vit dans un espace isomorphe à  $[\lambda^{0,1} \otimes \lambda^{0,2}]$ .

Soit une forme décomposable  $\alpha = \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_p} \wedge \beta_{i_1} \wedge \beta_{i_q} \in \lambda^{p,q}$  où pour tout  $j$ ,  $\alpha_j$  est de type  $(1,0)$  et  $\beta_j$  est de type  $0,1$ . En prenant la différentielle extérieure on voit aisément

$$d\alpha \in \lambda^{p-1,q+2} \oplus \lambda^{p,q+1} \oplus \lambda^{p+1,q} \oplus \lambda^{p,q+1}$$

Mais si  $J$  est intégrable, par la proposition 3.1.4, (ii),

$$d(\Omega^{1,0}(M)) \subset \Omega^{2,0}(M) \oplus \Omega^{1,1}(M)$$

et par conjugaison

$$d(\Omega^{0,1}(M)) \subset \Omega^{1,1}(M) \oplus \Omega^{0,2}(M)$$

D'où

**Proposition 3.1.5.** — *La structure presque complexe  $J$  est intégrable si et seulement si quels que soient  $p, q = 1, \dots, n$ ,*

$$d(\Omega^{p,q}(M)) \subset \Omega^{p,q+1}(M) \oplus \Omega^{p+1,q}(M)$$

### 3.2. Variétés presque hermitiennes, classification de Gray-Hervella

Le groupe  $U(n)$  peut être décrit de deux façons – comme  $GL(n, \mathbb{C})$  – comme le groupe des endomorphismes  $\mathbb{C}$ -linéaires unitaires de  $\mathbb{C}^n$ , muni de son produit scalaire hermitien canonique  $h$  – l'ensemble des matrices carrées  $n \times n$  à coefficients complexes, hermitiennes – ou à l'intérieur de  $GL(2n, \mathbb{R})$ , comme le sous-groupe des endomorphismes qui préservent le produit scalaire canonique  $g$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  et  $J$ , défini par (3.2), à la fois.

L'endomorphisme  $J$  est lui-même orthogonal, par conséquent  $g$  et  $J$  définissent une 2-forme  $\omega$  par

$$(3.10) \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \omega(X, Y) = g(JX, Y)$$

En effet  $g(JX, Y) = g(J^2X, JY) = -g(X, JY)$ . Les tenseurs  $h$ ,  $g$  et  $\omega$  sont liés entre eux par

$$h(X, Y) = g(X, Y) + i\omega(X, Y)$$

Alors, une réduction à  $U(n)$  du fibré des repères équivaut à la donnée d'une métrique et d'une structure presque complexe, ou d'une métrique et d'une 2-forme, compatibles au sens de la

**Définition 3.2.1.** — *Une variété presque hermitienne est une variété  $M^{2n}$  donnée avec une réduction du fibré des repères  $GL(M)$  à  $U(n)$  ou autrement dit, avec une métrique  $g$  et une structure presque complexe vérifiant*

$$(3.11) \quad \forall X, Y \in TM, \quad g(JX, JY) = g(X, Y)$$

**Définition 3.2.2.** — *La 2-forme différentielle  $\omega$  définie par (3.10) est la forme de Kähler de la variété presque hermitienne.*

Le stabilisateur d'une 2-forme non-dégénérée sur  $\mathbb{R}^{2n}$  est  $Sp(2n, \mathbb{R})$ , le groupe symplectique. Une structure  $U(n)$ , définissant une variété presque hermitienne, est donc l'intersection d'une structure  $Sp(2n, \mathbb{R})$  et d'une structure  $GL(n, \mathbb{C})$  (ou structure presque complexe).

Les sections  $s$  de  $Sp(M)$  sont telles que si  $s^*\tau = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ , la 2-forme  $\omega$  s'écrit

$$\omega = x_1 \wedge y_1 + \dots + x_n \wedge y_n$$

Si  $s$  est intégrable,  $dx_j = dy_j = 0$  pour tout  $j = 1, \dots, n$  donc si  $Sp(M)$  est intégrable,  $d\omega = 0$ . La réciproque est vraie : c'est le théorème de Darboux. D'autre part on a vu à la section 1, proposition 3.1.4, que  $GL(M, \mathbb{C})$  est intégrable si et seulement si  $N = 0$ . Par conséquent, pour une variété presque hermitienne, si  $U(M)$  est intégrable, ou seulement intégrable à l'ordre 1, on doit avoir  $d\omega = 0$  et  $N = 0$ .

Soit  $SO(M)$  la réduction de  $GL(M)$  à  $SO(m)$  induite par la métrique  $g$ ,  $U(M)$  est la réduction de  $SO(M)$  à  $U(n)$  induite par  $\omega$ . En effet

$$U(n) = \text{Stab}_{SO(m)} \omega$$

Notez qu'on désigne ici de la même façon, par  $\omega$ , le tenseur constant de  $\Lambda^2 \mathbb{R}^{2n}$  et la 2-forme différentielle.

Soit  $\nabla$  la connexion de Levi-Civita de  $g$ , la torsion intrinsèque de  $U(M)$  (cf définition 1.2.24) est identifiée à  $\nabla\omega$  ou  $\nabla J$ . L'identification est donnée par

$$(3.12) \quad \bar{\eta}.\omega = \nabla\omega$$

Le sous-espace  $\mathfrak{u}(M)$  de  $\mathfrak{so}(M)$  est l'ensemble des endomorphismes qui commutent à  $J$  alors, comme  $J$  est orthogonal,  $\mathfrak{u}(M)^\perp$  est l'ensemble des endomorphismes qui anticommulent à  $J$ . La torsion intrinsèque en particulier vérifie

$$(3.13) \quad \bar{\eta}_X JY + J\bar{\eta}_X Y = 0$$

Pour une variété métrique, l'application

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \mathfrak{so}(M) &\rightarrow \Lambda^2 \\ A &\mapsto \{ (X, Y) \mapsto g(AX, Y) \} \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Pour une variété presque hermitienne on a en outre les isomorphismes  $U(n)$ -invariants

$$\mathfrak{u}(M) \simeq [\lambda^{1,1}] \quad \text{et} \quad \mathfrak{u}(M)^\perp \simeq \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket$$

La dérivée de la forme de Kähler  $\nabla\omega$  est une section de  $\Lambda^1 \otimes \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket$ . En effet, en dérivant  $J^2 = -Id$  on obtient

$$(3.15) \quad (\nabla_X J)J + J(\nabla_X J) = 0$$

Comme  $\nabla$  est une connexion métrique,

$$(3.16) \quad \nabla_X \omega(Y, Z) = g((\nabla_X J)Y, Z)$$

Finalement

$$\nabla_X \omega(JY, JZ) = -\nabla_X \omega(Y, Z)$$

**Proposition et définition 3.2.3.** — La connexion hermitienne canonique  $\bar{\nabla}$  définie par

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}J(\nabla_X J)Y$$

est la connexion intrinsèque de  $U(M)$ .

*Démonstration.* — En utilisant (3.16), l'équation (3.12) devient

$$-g(J\bar{\eta}_X Y, Z) - g(JY, \bar{\eta}_X Z) = g((\nabla_X J)Y, Z)$$

D'où, puisque  $\bar{\eta}_X$  est antisymétrique et anticommuté à  $J$ ,

$$(3.17) \quad \forall X \in TM, \quad \bar{\eta}_X = \frac{1}{2}J(\nabla_X J) = \nabla - \bar{\nabla}$$

□

**Définition 3.2.4.** — Une variété kählérienne est une variété presque hermitienne  $(M, g, \omega)$  intégrable à l'ordre 1 c'est-à-dire telle que  $\nabla\omega = 0$ .

Lorsque  $M$  n'est pas intégrable à l'ordre 1, il y a cependant des cas où son 1-jet vérifie certaines conditions utiles : soit  $\nabla\omega = [p, \nabla\omega(p)]$ , on demande que  $\nabla\omega$  prenne ses valeurs dans un sous-espace propre  $W \subsetneq \Lambda^1 \otimes \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket$ . Comme elle est équivariante,  $W$  doit être stable par  $U(n)$ . Il faut donc décomposer  $\Lambda^1 \otimes \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket$  en composantes irréductibles de la représentation de  $U(n)$ . C'est ce que font Gray, Hervella dans l'article [31].

**Proposition 3.2.5 (Gray & Hervella).** — *Pour  $n \geq 3$ , on désigne par  $U^1$  la représentation irréductible de  $U(n)$  de poids dominant  $(2, 1, 0, \dots, 0)$ . Alors on a la décomposition en composantes irréductibles :*

$$(3.18) \quad \Lambda^1 \otimes \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$$

avec

$$(3.19) \quad W_1 \simeq \llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket, \quad W_2 \simeq \llbracket U^1 \rrbracket, \quad W_3 \simeq \llbracket \lambda_0^{2,1} \rrbracket \quad \text{et} \quad W_4 \simeq \Lambda^1$$

Pour  $n = 2$ , cette décomposition est toujours valable mais  $W_1, W_3$  sont réduits à 0.

*Démonstration.* — On écrit premièrement

$$(3.20) \quad \Lambda^1 \otimes \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket = \llbracket \lambda^{1,0} \otimes \lambda^{2,0} \rrbracket \oplus \llbracket \lambda^{0,1} \otimes \lambda^{2,0} \rrbracket$$

Or

$$(3.21) \quad \llbracket \lambda^{0,1} \otimes \lambda^{2,0} \rrbracket = \llbracket \lambda^{2,1} \rrbracket = \llbracket \lambda_0^{2,1} \rrbracket \oplus \Lambda^1$$

Il existe un sous-espace  $U^1$ ,  $U(n)$ -invariant (éventuellement réduit à 0) tel que

$$(3.22) \quad \lambda^{1,0} \otimes \lambda^{2,0} \simeq \lambda^{3,0} \oplus U^1$$

Or cette décomposition est la décomposition irréductible de  $\lambda^{1,0} \otimes \lambda^{2,0}$ . Par la méthode de Salamon, pour  $n = 4$ ,

$$\begin{array}{lll} (1, 0, 0, 0) & (2, 1, 0, 0) \checkmark & (2, 1, 0, 0) \\ (0, 1, 0, 0) & (1, 2, 0, 0) & (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) \times \\ (0, 0, 1, 0) & (1, 1, 1, 0) \checkmark & (1, 1, 1, 0) \\ (0, 0, 0, 1) & (1, 1, 0, 1) & (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \times \end{array}$$

d'où

$$[1, 0, 0, 0] \otimes [1, 1, 0, 0] = [2, 1, 0, 0] \oplus [1, 1, 1, 0]$$

c'est-à-dire (3.22)

$$\Lambda^1 \otimes \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket \simeq \llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket \oplus \llbracket U^1 \rrbracket \oplus \llbracket \lambda_0^{2,1} \rrbracket \oplus \Lambda^1$$



Cette décomposition est en fait valable quel que soit  $n \geq 2$  mais en dimension 4,  $[\lambda^{3,0}]$  et  $[\lambda_0^{2,1}]$  sont réduits à 0.  $\square$

A chaque composante irréductible  $W_i$  on associe un sous-fibré  $W_i(M)$  de  $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(M)^\perp$ , invariant par les automorphismes intérieurs de  $U(M)$ .

**Définition 3.2.6.** — Soit  $I \subset \{1, 2, 3, 4\}$ . On appelle variété de type  $\bigoplus_{i \in I} W_i$ , une variété presque hermitienne  $(M, g, J)$  telle que  $\nabla\omega$  est une section de  $\bigoplus_{i \in I} W_i(M)$  et on appelle classe  $\bigoplus_{i \in I} W_i$  l'ensemble de ces variétés.

On peut procéder de même à partir de  $\bar{\eta}$  et on obtient les mêmes classes car  $\bar{\eta}$  et  $\nabla\omega$  sont échangés par des isomorphismes  $U(n)$ -invariants : par (3.16), (3.17),

$$(3.23) \quad \nabla\omega(X, Y, Z) = 2g(\bar{\eta}_X Y, JZ)$$

Plus précisément, soient  $w_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  les composantes de  $\nabla\omega$  dans la décomposition (3.18) :  $\forall i = 1, 2, 3, 4$ ,  $w_i$  est donc une section de  $W_i(M)$ , et soient  $\xi, \zeta, \chi, \vartheta$  les composantes de  $\bar{\eta}$  dans la décomposition correspondante. On peut identifier, via (3.23),  $w_1$  à  $\xi$ ,  $w_2$  à  $\zeta$  etc. On préfère noter différemment, pour la clarté du propos, des tenseurs qui pourtant du point de vue de la structure  $U(n)$ , ou des représentations de  $U(n)$ , sont équivalents c'est-à-dire sont échangés par des isomorphismes  $U(n)$ -invariants connus, faisant intervenir la métrique, la structure presque complexe, et des opérations linéaires universelles des variétés.

Par exemple, la variété  $M$  de type  $W_1 \oplus W_4$  si et seulement si  $w_2 = w_3 = 0$  mais aussi, de façon équivalente,  $\zeta = \xi = 0$ .

On souhaite préciser les propriétés algébriques de cette décomposition en se référant par exemple à [1] ou [31], à nouveau. D'abord les projecteurs  $p_-$ ,  $p_+$  correspondant à la décomposition (3.20) sont donnés par

$$p_- \beta(X, Y, Z) = \frac{1}{2}(\beta(X, Y, Z) - \beta(JX, JY, Z))$$

et

$$p_+ \beta(X, Y, Z) = \frac{1}{2}(\beta(X, Y, Z) + \beta(JX, JY, Z))$$

en effet les tenseurs  $\alpha \in [\lambda^{1,0} \otimes \lambda^{2,0}] = W_1 \oplus W_2$  et  $\beta \in [\lambda^{0,1} \otimes \lambda^{2,0}] = W_3 \oplus W_4$  sont caractérisés respectivement par  $\alpha(JX, JY, Z) = -\alpha(X, Y, Z)$  et  $\beta(JX, JY, Z) = \beta(X, Y, Z)$ .

Par ailleurs,

$$\Lambda^1 \otimes \Lambda^2 = \Lambda^1 \otimes [\lambda^{2,0}] \oplus \Lambda^1 \otimes [\lambda^{1,1}]$$

On a calculé la décomposition en composantes irréductibles de  $\Lambda^1 \otimes [\lambda^{1,1}]$  en (2.12). Finalement on a la décomposition en composantes isotypiques :

$$(3.24) \quad \Lambda^1 \otimes \Lambda^2 \simeq \llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket \oplus 2\llbracket \lambda_0^{2,1} \rrbracket \oplus 3\Lambda^1 \oplus \llbracket U^1 \rrbracket \oplus \llbracket U_0^2 \rrbracket$$

Maintenant  $\Lambda^3 \subset \Lambda^1 \otimes \Lambda^2$  se décompose en

$$(3.25) \quad \Lambda^3 = \llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket \oplus \llbracket \lambda_0^{2,1} \rrbracket \oplus \Lambda^1$$

Il y a un unique sous-espace isomorphe à  $\llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket$  dans (3.24). Par conséquent  $W_1$  dans (3.18) et  $\llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket \subset \Lambda^3$  coïncident. En fait on peut montrer que  $\Lambda^3 \cap (\Lambda^1 \otimes \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket) = \llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket$ , c'est-à-dire que  $W_1$  est le sous-espace de  $\Lambda^1 \otimes \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket$  formé des tenseurs totalement antisymétriques.

$$w_1(X, Y, Z) = -w_1(Y, X, Z)$$

et aussi

$$\xi_X Y = -\xi_Y X$$

Si on prend  $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{u}(n)$  égal à  $\mathfrak{sp}(n)$  ou  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ ,

$$\frac{\Lambda^2 \otimes TM}{\mathfrak{d}(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{h}(M))} \subset \frac{\Lambda^2 \otimes TM}{\mathfrak{d}(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(M))} \simeq \Lambda^1 \otimes \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket$$

Par conséquent le tenseur de Nijenhuis  $N$  et  $d\omega$  sont déterminés par  $\nabla\omega$ .

En effet, le permutation circulaire sur les 3 variables envoie  $\Lambda^1 \otimes \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket$  surjectivement sur l'espace des 3-formes et  $\nabla\omega$  sur  $d\omega$  :

$$d\omega(X, Y, Z) = \nabla\omega(X, Y, Z) + \nabla\omega(Z, X, Y) + \nabla\omega(Y, Z, X)$$

De plus, son noyau est  $W_2$ . Comme elle est  $U(n)$ -équivariante, elle permet donc d'identifier les composantes  $w_1, w_3$  et  $w_4$ , respectivement, aux composantes de  $d\omega$  dans la décomposition (3.25), c'est-à-dire la décomposition en types. On note  $\bar{\psi} = (d\omega)^{3,0}$  la partie de type  $(3,0)+(0,3)$  de  $d\omega$ . Le sous-espace isomorphe à  $\Lambda^1$  de  $\Lambda^3$  est plus précisément l'image de l'application  $L$  qui fait le produit extérieur des 1-formes avec  $\omega$  et ainsi on appelle  $\theta$  la 1-forme telle que

$$d\omega = \bar{\psi} + (d\omega)_0^{2,1} + \omega \wedge \theta$$

**Définition 3.2.7.** — La 1-forme  $\theta$  est la forme de Lee de la variété presque hermitienne.

Elle est liée à la co-différentielle de  $\omega$  :

$$\theta = \frac{1}{2} J\delta\omega$$

mais elle est plus maniable dans ce contexte.

Comme  $w_1 \in \llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket$  est déjà antisymétrique,  $\psi = 3w_1$  et par (3.23)

$$(3.26) \quad 6g(\xi_X Y, Z) = -\overline{\psi}(JX, Y, Z)$$

Quant à  $\vartheta$ , elle est donnée à partir de  $\theta \in \Lambda^1$  par la formule :

$$(3.27) \quad 4\vartheta_X = X^\flat \wedge \theta - JX^\flat \wedge J\theta$$

où  $\flat$  désigne l'« isomorphisme musical » qui à un vecteur associe sa 1-forme duale par la métrique. Notons également que l'expression ci-dessus identifie un endomorphisme antisymétrique de l'espace tangent  $\vartheta_X$  et une 2-forme différentielle (voir (3.14)).

En ce qui concerne le tenseur de Nijenhuis, la torsion de  $\overline{\nabla}$  est définie par

$$[X, Y] = \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X - \overline{T}(X, Y)$$

En remplaçant dans (3.8) et en remarquant  $\overline{\nabla}_{JX} JY - J\overline{\nabla}_{JX} Y = (\overline{\nabla}_{JX} J)Y = 0$ , etc.,

$$(3.28) \quad N(X, Y) = \frac{1}{4}(-\overline{T}(JX, JY) + J\overline{T}(JX, Y) + J\overline{T}(X, JY) + \overline{T}(X, Y))$$

ce qui peut encore s'écrire

$$N = \mathfrak{d}(p_- \overline{\eta})$$

car  $\overline{T} = \mathfrak{d}\overline{\eta}$ . Cela implique que  $N$  peut-être identifié à la somme  $\xi + \zeta$  (ou  $w_1 + w_2$  via la métrique). On avait déjà remarqué, équation (3.9), en interprétant l'intégrabilité de  $J$  via les 1-formes, que le tenseur de Nijenhuis vit dans un espace isomorphe à  $\llbracket \lambda^{1,0} \otimes \lambda^{2,0} \rrbracket$ . En tenant compte maintenant de (3.22) on le décompose en

$$N = N_1 + N_2$$

où  $N_1$  est totalement antisymétrique et  $N_2$  vérifie l'identité de Bianchi. Alors  $\xi$  est identifié à  $N_1$  par

$$(3.29) \quad N_1(X, Y) = 2\xi_X Y$$

et  $N_2$  est identifié à  $\zeta$  ou  $w_2$  par

$$N_2(X, Y) = \zeta_X Y - \zeta_Y X$$

ou

$$g(N_2(X, Y), Z) = \frac{1}{2}w_2(JZ, X, Y)$$

Récapitulons. On peut écrire une première série de tenseurs « équivalents » :  $w_1, \xi, \psi$  ou  $(d\omega)^{3,0}$ , et  $N_1$ . Une autre série est  $w_2, \zeta, N_2$ . Une troisième  $w_3, \chi, (d\omega)_0^{1,2}$ . Enfin on identifiera  $w_4, \vartheta, \omega \wedge \theta$  ou  $\theta$  et la co-différentielle de la forme de Kähler  $\delta\omega$ .

FIG. 1. Décomposition de Gray, Hervella

$W_1 \simeq \llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket$	$W_3 \simeq \llbracket \lambda_0^{2,1} \rrbracket$
$W_2 \simeq \llbracket U^1 \rrbracket$	$W_4 \simeq \Lambda^1$

FIG. 2. Décomposition des tenseurs  $\bar{\eta}$ ,  $d\omega$  et  $N$ 

$\xi$	$\chi$	$\psi$	$(d\omega)_0^{2,1}$	$N_1$	
$\zeta$	$\vartheta$		$\theta$	$N_2$	

Tout cela, ces notations et ces correspondances, est résumé par les figures 1 et 2.

### 3.3. Réduction d'une variété presque hermitienne de dimension 6 à $SU(3)$

On s'intéresse dans cette section à des variétés presque hermitiennes telles que  $U(M)$  a une réduction supplémentaire à  $SU(n)$ , le groupe spécial unitaire. Plus précisément on s'intéresse à la dimension 6 et à des variétés  $SU(3)$ .

Le groupe spécial unitaire est le sous-groupe de  $U(n)$  formé des éléments de déterminant complexe égal à 1, c'est-à-dire qui préservent une  $n$ -forme complexe – une forme extérieure de type  $(n, 0)$  – non nulle. Alors

**Définition 3.3.1.** — *Une variété spéciale presque hermitienne est une variété presque hermitienne  $M^{2n}$  munie d'une forme volume complexe  $\Psi$  : une forme différentielle complexe de type  $(n, 0)$ , de norme 1.*

La forme volume complexe  $\Psi$  se décompose en la somme de sa partie réelle et sa partie imaginaire :

$$(3.30) \quad \Psi = \psi + i\phi$$

où  $\psi = \frac{1}{2}(\Psi + \bar{\Psi}) \in \llbracket \lambda^{n,0} \rrbracket$  et  $\phi = -\frac{i}{2}(\Psi - \bar{\Psi}) \in \llbracket \lambda^{n,0} \rrbracket$  sont des formes réelles. Elles sont liées entre elles par

$$(3.31) \quad \psi(X_1, \dots, X_n) = \phi(JX_1, \dots, X_n)$$

En effet  $\Psi(X_1, \dots, X_n)$  est nulle dès qu'un des  $X_j$  est de type  $(0, 1)$  donc

$$(3.32) \quad \Psi(X_1, \dots, X_j, \dots, X_n) = -i\Psi(X_1, \dots, JX_j, \dots, X_n)$$

La convention adoptée ici et dans la suite pour la norme des formes différentielles est la suivante. Si  $(e_1, \dots, e_m)$  est un repère local orthonormé, un repère local orthonormé de  $\Lambda^p$  est donné par les formes

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$$

De même pour les formes complexes en utilisant un repère unitaire  $(u_1, \dots, u_n)$ . Par conséquent  $\Psi$  est de norme 1 si et seulement si elle s'écrit localement

$$\Psi = u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n$$

et on peut calculer que la norme de sa partie réelle  $\psi$  est  $2^{(n-1)/2}$ .

Par (3.31),  $\phi$  est déterminé à partir de  $\psi$  par la structure presque complexe, puis bien entendu  $\Psi = \psi + i\phi$ . Finalement on a la définition équivalente à 3.3.1 :

**Définition 3.3.2.** — *Une variété spéciale presque hermitienne est une variété presque hermitienne  $M^{2n}$  munie d'une forme différentielle réelle  $\psi \in \llbracket \lambda^{n,0} \rrbracket$  de norme  $2^{(n-1)/2}$ .*

Les  $n$ -formes  $\Psi$  ou  $\psi$ , suivant la définition choisie, ne sont pas canoniquement définies par la structure  $SU(n)$ . En effet on peut toujours multiplier  $\Psi$  par une constante appartenant à  $\mathbb{C}$ . Sur une variété presque hermitienne il existe en fait un fibré en cercle au dessus de  $M$  dont la fibre est constituée des éléments de norme  $2^{(n-1)/2}$  de  $[\lambda^{n,0}]$  en chaque point. La variété presque hermitienne est réductible à  $SU(n)$  s'il existe des sections globales de ce fibré. La définition ci-dessus 3.3.2 consiste à en choisir une. On en obtient d'autres simplement en faisant des rotations dans chaque fibre.

On remarque que (3.32) implique  $\Psi(X_1, \dots, JX_j, \dots, X_n) = \Psi(X_1, \dots, JX_k, \dots, X_n)$  pour tous  $j, k = 1, \dots, n$  ou encore

$$(3.33) \quad \Psi(X_1, \dots, JX_j, \dots, JX_k, \dots, X_n) = -\Psi(X_1, \dots, X_j, \dots, X_k, \dots, X_n)$$

Pour une forme de type  $(0, n)$  le signe change dans (3.32) mais (3.33) reste vraie. Finalement cette dernière équation caractérise les formes de type  $(n, 0) + (0, n)$ . En particulier  $\psi, \phi \in [\lambda^{n,0}]$  la satisfont.

On souhaite rappeler quelques propriétés algébriques des formes réelles de type  $(n, 0) + (0, n)$ . Temporairement,  $\psi$  désigne une forme différentielle de type  $(n, 0) + (0, n)$  quelconque. Plus tard les résultats s'appliqueront à la forme définissant une variété spéciale presque hermitienne par 3.3.2, mais pas seulement. De plus, dans la suite  $\phi$  désigne l'unique  $n$ -forme telle que  $\Psi = \psi + i\phi$  est de type  $(n, 0)$ . Alors  $\psi, \phi$  sont liées par :

**Lemme 3.3.3.** — Soit  $\psi \in [\lambda^{n,0}]$  et soit  $\phi \in [\lambda^{n,0}]$  l'unique forme telle que  $\Psi = \psi + i\phi$  est de type  $(n, 0)$ .

- (i)  $\forall X \in TM, \quad \iota_X \psi = \iota_{JX} \phi$
- (ii)  $\omega \wedge \iota_X \psi = -JX^\flat \wedge \psi$ , et de même pour  $\phi$ .
- (iii)  $\forall \eta \in \Lambda^1, \quad \eta \wedge \psi = J\eta \wedge \phi$

*Démonstration.* — Le premier point (i) n'est qu'une réécriture de (3.31).

On prouve (ii). On a d'abord, par définition de la forme de Kähler

$$\iota_X \omega = JX^\flat$$

Puis par distributivité du produit intérieur

$$\iota_X(\omega \wedge \psi) = JX^\flat \wedge \psi + \omega \wedge \iota_X \psi$$

Or le premier membre est nul car  $\omega$  est de type  $(1,1)$  mais il n'y a pas de forme de type  $(n+1, 1) + (1, n+1)$  en dimension  $2n$ .

Enfin (iii) résulte de (i) et (ii)

$$\eta \wedge \psi = \omega \wedge \iota_{J\eta^\sharp} \psi = -\omega \wedge \iota_{\eta^\sharp} \phi = J\eta \wedge \phi$$

où  $\sharp$  désigne l'isomorphisme inverse, de  $\Lambda^1$  dans  $TM$ , de  $\flat$ .  $\square$

Si  $\psi$  et  $\phi$  ne s'annulent pas, elles forment un repère global de  $[\lambda^{n,0}]$  ( $\dim_{\mathbb{C}} \lambda^{n,0} = 1$  d'où  $\dim_{\mathbb{R}} [\lambda^{n,0}] = 2$ ).

Dans la suite, on se place en dimension 6,  $n = 3$ . On peut réécrire (3.31)

$$(3.34) \quad \phi = -J\psi$$

Sur une variété presque hermitienne, on a une forme de type  $(3,0)+(0,3)$  naturellement définie

$$\bar{\psi} = (d\omega)^{3,0}$$

Alors on note  $\bar{\phi}$  la 3-forme définie par

$$\bar{\phi} = -J\bar{\psi}$$

et

$$\bar{\Psi} = \bar{\psi} + i\bar{\phi} \in \lambda^{n,0}$$

En général  $\bar{\psi}$  n'est pas de norme constante et a des zéros sur  $M$ . Par conséquent elle ne définit pas de réduction globale à  $SU(3)$ . Cependant, ce sera le cas localement pour des variétés considérées au chapitre 6 et surtout, les variétés NK non kähleriennes en dimension 6 (appelées ici variétés de Gray) sont telles que  $\bar{\psi}$  est de norme constante non nulle. Quitte à multiplier la métrique par une constante on peut supposer que cette norme est 2. Alors on définira la structure  $SU(3)$  naturelle d'une variété de Gray en posant simplement  $\psi = \bar{\psi}$  dans 3.3.2. Cela explique qu'on ait choisi des notations proches. Toutefois, pour l'instant on s'occupe de variétés  $SU(3)$  en général donc elles sont bien distinctes jusqu'au chapitre suivant.

En dimension 6, on a une autre relation utile entre  $\psi$  et  $\phi$  :

**Lemme 3.3.4.** — *Pour une variété spéciale presque hermitienne  $(M, g, \omega, \psi)$  de dimension 6,*

$$(3.35) \quad \phi = *\psi$$

*Démonstration.* — Soit  $(e_j)_{j=1,\dots,6}$  un repère local adapté à la structure presque hermitienne : orthonormé et vérifiant

$$\forall j = 1, \dots, 3 \quad J e_{2j-1} = e_{2j}$$

On note  $(e^i)_{i=1,\dots,6}$  le repère dual :  $\forall j = 1, \dots, 6, e^i = e_i^\flat$ . Alors la forme de Kähler est

$$(3.36) \quad \omega = e^{12} + e^{34} + e^{56}$$

où  $e^{12} = e^1 \wedge e^2$ , etc. Une base unitaire de  $T^{1,0}$  est  $(e_1 - ie_2, e_3 - ie_4, e_5 - ie_6)$  et une base de  $\lambda^{1,0}$ ,  $(e^1 + ie^2, e^3 + ie^4, e^5 + ie^6)$ . Par conséquent la forme volume complexe  $\Psi$  s'écrit localement

$$\Psi = (e^1 + ie^2) \wedge (e^3 + ie^4) \wedge (e^5 + ie^6)$$

et  $\psi, \phi$  sont données dans un co-repère local par

$$(3.37) \quad \begin{aligned} \psi &= e^{135} - e^{146} - e^{236} - e^{245} \\ \phi &= e^{136} + e^{145} + e^{235} - e^{246} \end{aligned}$$

Dès lors (3.35) résulte d'une simple vérification □

La forme volume réelle est

$$(3.38) \quad \text{vol} = e^{123456} = \frac{1}{6} \omega \wedge \omega \wedge \omega$$

On voit

$$\psi \wedge \phi = \psi \wedge * \psi = 4 \text{vol} = \frac{2}{3} \omega \wedge \omega \wedge \omega$$

Cela suggère de définir le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et la norme  $|\cdot|$  associée sur  $[\lambda^{3,0}]$  par

**Définition 3.3.5.** — Soient  $\psi, \psi' \in [\lambda^{3,0}]$ .

$$(3.39) \quad \psi \wedge * \psi' = \langle \psi, \psi' \rangle \text{vol}$$

Pour une variété spéciale presque hermitienne de dimension 6, les formes  $\psi$  et  $\phi$  sont de norme 2 à cause de la convention choisie.

Une autre expression de (3.39) nous sera utile :

**Lemme 3.3.6.** — Soit  $(e_i)_{i=1,\dots,6}$  est un repère orthonormé

$$(3.40) \quad 2 \sum_{i=1}^6 \iota_{e_i} \psi \wedge \iota_{e_i} \psi' = \langle \psi, \psi' \rangle \omega \wedge \omega$$



*Démonstration.* — On introduit la convention, pour toute forme  $\alpha$  et tous vecteurs  $X_1, X_2, \dots, X_p$

$$\iota_{X_1^\flat \wedge X_2^\flat \wedge \dots \wedge X_p^\flat} \alpha = \iota_{X_p} \dots \iota_{X_2} \iota_{X_1} \alpha$$

si bien que, par exemple, par (3.36),

$$\iota_\omega \omega = 3$$

et par (3.38)

$$(3.41) \quad \iota_\omega \text{vol} = \frac{1}{2} \omega \wedge \omega$$

NB : Ce produit intérieur généralisé par une  $p$ -forme n'est pas une dérivation, sauf dans le cas où  $p = 1$ .

Dans un repère orthonormé quelconque

$$(3.42) \quad \omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 e^i \wedge J e^i$$

Notons qu'avec les conventions choisies,  $(JX)^\flat = JX^\flat$ . En contractant dans (3.39), en utilisant (3.41) et le fait que, pour tout  $X \in TM$  et toute forme  $\psi$  de type  $(3,0)+(0,3)$ ,  $\iota_X \iota_{JX} \alpha = 0$  par (3.32),

$$\begin{aligned} \langle \psi, \psi' \rangle \omega \wedge \omega &= 2 \langle \psi, \psi' \rangle \iota_\omega \text{vol} \\ &= 2 \iota_\omega (\psi \wedge * \psi') \\ &= \sum_{j=1}^6 \iota_{e_j} \psi \wedge \iota_{J e_j} * \psi' - \sum_{j=1}^6 \iota_{J e_j} \psi \wedge \iota_{e_j} * \psi' \end{aligned}$$

Or  $\forall \psi \in [\lambda^{3,0}]$ , soit  $\phi = * \psi$ ,  $\iota_{JX} \phi = \iota_X \psi$  (voir (i) du lemme 3.3.3). □

On veut décomposer la torsion intrinsèque de  $SU(M)$  pour obtenir un analogue de la classification de Gray, Hervella pour les variétés  $SU(3)$ . On suit en cela Salamon et Chiossi [16] mais on apporte des précisions par rapport à eux, par des formules explicites qui seront utiles dans les calculs au chapitre 6.

La 3-forme de type  $(3,0)+(0,3)$  préservée par  $SU(3)$  en dimension 6 fournit des isomorphismes  $SU(3)$ -invariants entre certaines représentations de  $U(3)$  ou au niveau de la géométrie,  $\psi$  ou  $\phi$  fournissent des isomorphismes entre certains fibrés associés de  $U(M)$  :

**Lemme 3.3.7.** — *Pour une variété spéciale presque hermitienne  $(M, g, \omega, \psi)$  de dimension 6 on a les isomorphismes  $SU(3)$ -invariants :*

$$[\lambda^{3,1}] \simeq [\lambda^{2,0}] \simeq \Lambda^1$$

*Démonstration.* — Les applications

$$(3.43) \quad \begin{aligned} [\lambda^{2,0}] &\rightarrow [\lambda^{3,1}] \\ \alpha &\mapsto \alpha \wedge \omega \end{aligned}$$

$$(3.44) \quad \begin{aligned} \Lambda^1 &\rightarrow [\lambda^{2,0}] \\ \alpha &\mapsto \iota_{\alpha^\#} \psi \end{aligned}$$

et

$$(3.45) \quad \begin{aligned} \Lambda^1 &\rightarrow [\lambda^{3,1}] \\ \alpha &\mapsto \alpha \wedge \psi \end{aligned}$$

sont les isomorphismes cherchés. En effet, ils ne font intervenir que  $\omega$ ,  $\psi$  et la métrique pour le second. Par conséquent ils sont  $SU(3)$ -invariants. Il n'est pas difficile de montrer qu'ils sont inversibles. En ce qui concerne les deux derniers, une façon de le voir est la suivante.

Toute forme  $\alpha$  de type  $(2,0)+(0,2)$  peut s'écrire comme le produit intérieur d'une 3-forme de type  $(3,0)+(0,3)$  par un vecteur  $X \in TM$ . Maintenant  $(\psi, \phi)$  est une base de  $[\lambda^{3,0}]$  donc  $\alpha$  est une combinaison linéaire de  $\iota_X \psi$ ,  $\iota_X \phi$  mais de plus, par le lemme 3.3.3 (i),  $\iota_X \phi = -\iota_{JX} \psi$ . Finalement toute forme de type  $(2,0)+(0,2)$  peut s'écrire de façon unique  $\iota_X \psi$  pour un vecteur  $X$ .

Un raisonnement similaire en se servant cette fois de 3.3.3 (ii) montre que toute forme de type  $(3,1)+(1,3)$  peut s'écrire  $\alpha \wedge \psi$  pour une unique 1-forme  $\alpha$  donc (3.44), (3.45) sont des isomorphismes.

Pour le dernier cela implique en particulier que  $[\lambda_0^{3,1}] = \{0\}$ , en dimension 6.

□

En outre, un examen des dimensions montre que  $[\lambda_0^{2,2}]$  est réduit à 0 en dimension 6 c'est-à-dire

$$(3.46) \quad [\lambda^{2,2}] \simeq [\lambda_0^{1,1}] \oplus \mathbb{R}$$

Au niveau des représentations complexes, une forme volume complexe définit une forme bilinéaire non dégénérée  $\lambda^{2,0} \times \lambda^{1,0} \rightarrow \mathbb{R}$  via le produit extérieur. Par conséquent  $\Psi$  induit un isomorphisme

$$(3.47) \quad \lambda^{2,0} \simeq (\lambda^{1,0})^* \simeq \lambda^{0,1}$$

On est maintenant prêt à décomposer l'espace  $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{su}(3)^\perp$ , où vit la torsion intrinsèque en chaque point, en composantes irréductibles de l'action de  $SU(3)$ . D'abord

$$\mathfrak{u}(n) \simeq \mathfrak{su}(n) \oplus \mathbb{R}$$

ce qui correspond à la décomposition de  $[\lambda^{1,1}]$  :

$$[\lambda^{1,1}] = [\lambda_0^{1,1}] \oplus \mathbb{R}\omega$$

Dès lors  $\mathfrak{su}^\perp(n) \simeq \mathfrak{u}(n)^\perp \oplus \mathbb{R}$  puis

$$(3.48) \quad \Lambda^1 \otimes \mathfrak{su}^\perp(n) = \Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(n)^\perp \oplus W_5$$

où  $W_5 \subset \Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(n)$  est isomorphe à  $\Lambda^1$ . De là une première décomposition de la torsion intrinsèque :

**Lemme 3.3.8.** — Soit  $\bar{\eta}_s = \nabla - \bar{\nabla}_s$  la torsion intrinsèque de  $SU(M)$ . On désigne toujours par  $\bar{\eta}$  la torsion intrinsèque de la variété presque hermitienne sous-jacente, c'est-à-dire de  $U(M)$ . Alors

$$\bar{\eta}_s = \bar{\eta} + \varsigma$$

où  $\varsigma \in W_5$ .

*Démonstration.* — Une connexion spéciale hermitienne (une  $SU(n)$ -connexion) est une connexion hermitienne donc la projection de  $\nabla - \bar{\nabla}_s$  sur  $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(n)^\perp$  est  $\bar{\eta}$ , par définition de la torsion intrinsèque.  $\square$

Cependant la décomposition (3.18) de  $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(n)^\perp \simeq \Lambda^1 \otimes \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket$  n'est plus irréductible pour  $SU(3)$ .

**Proposition 3.3.9.** — La décomposition

$$(3.49) \quad \Lambda^1 \otimes \mathfrak{su}(n)^\perp \simeq 2\mathbb{R} \oplus 2\Lambda^1 \oplus 2[\lambda_0^{1,1}] \oplus \llbracket \sigma^{2,0} \rrbracket$$

est la décomposition en composantes irréductibles de la représentation de  $SU(3)$ . En particulier

$$W_1 \simeq 2\mathbb{R}, \quad W_2 \simeq 2[\lambda_0^{1,1}], \quad W_3 \simeq \llbracket \sigma^{2,0} \rrbracket$$

et toujours  $W_4 \simeq \Lambda^1$  pour une variété  $SU(3)$ .

*Démonstration.* — Par (3.47),

$$W_1 \oplus W_2 = [\lambda^{1,0} \otimes \lambda^{2,0}] \simeq [\lambda^{1,0} \otimes \lambda^{0,1}] \simeq 2[\lambda^{1,1}] \simeq 2[\lambda_0^{1,1}] \oplus 2\mathbb{R}$$

La base  $(\phi, \psi)$  de  $[\lambda^{3,0}]$  fournit la décomposition de  $W_1$  :

$$(3.50) \quad W_1 \simeq 2\mathbb{R}$$

On en déduit

$$(3.51) \quad W_2 \simeq 2[\lambda_0^{1,1}]$$

D'autre part,

$$W_3 \oplus W_4 = [\lambda^{1,0} \otimes \lambda^{0,2}] \simeq [\lambda^{1,0} \otimes \lambda^{1,0}] \simeq [\sigma^{2,0}] \oplus [\lambda^{2,0}]$$

Or on sait que  $W_4 \simeq \Lambda^1 \simeq [\lambda^{2,0}]$ . Finalement

$$W_3 \simeq [\lambda_0^{2,1}] \simeq [\sigma^{2,0}]$$

est irréductible.

De tout ceci et (3.48) on déduit la décomposition de l'espace total (3.49). On pouvait d'ailleurs l'obtenir directement (rappelons que  $[\sigma^{1,1}] \simeq [\lambda^{1,1}]$ ) :

$$\Lambda^1 \otimes [\lambda^{2,0}] \simeq \Lambda^1 \otimes \Lambda^1 \simeq S^2 \oplus \Lambda^2 = [\sigma^{2,0}] \oplus [\lambda^{2,0}] \oplus 2[\lambda_0^{1,1}] \oplus 2\mathbb{R}$$

□

Le groupe  $SU(n)$  peut être vu comme le stabilisateur de  $(\omega, \psi)$  dans  $SO(m)$ . Alors la torsion intrinsèque de  $SU(M)$  est représentée par  $(\nabla\omega, \nabla\psi)$ . Cependant, dans l'identification aux composantes de  $\bar{\eta}_s$ , certaines composantes sont déterminées « en double », à la fois par  $\nabla\psi$  et  $\nabla\omega$  (au contraire pour une variété presque hermitienne, il y a un isomorphisme entre  $\nabla\omega$  et  $\bar{\eta}$ ). Toutefois aucun des deux tenseurs ne suffit non plus à obtenir toutes les composantes de  $\bar{\eta}_s$ .

En effet

$$\nabla\omega = \nabla\omega - \bar{\nabla}_s\omega = \bar{\eta}_s.\omega$$

mais  $\varsigma.\omega = 0$  car  $\forall X \in TM, \varsigma_X \in \mathfrak{u}(n)$ . Par conséquent  $\varsigma$  ne peut pas être obtenue à partir de  $\nabla\omega$ . De même on verra que la composante  $\chi$  de  $\bar{\eta}_s$  ou  $\bar{\eta}$  dans  $W_3 \simeq [\lambda_0^{2,1}]$  ne peut pas être obtenue à partir de  $\nabla\psi$  car  $\chi.\psi = 0$ .

Comme on a identifié 3 composantes parmi 4 de  $\bar{\eta}$  à  $d\omega$  pour une variété presque hermitienne via la permutation circulaire, de même pour une variété spéciale presque hermitienne on identifie certaines composantes de  $\bar{\eta}_s$  à des composantes de  $d\psi, d\phi$ .

Pour cela on rappelle la définition de  $c$ , (1.34)

$$(3.52) \quad c(\beta)(X, Y, Z, T) = \beta(X, Y, Z, T) - \beta(Y, Z, T, X) + \beta(Z, T, X, Y) - \beta(T, X, Y, Z)$$

ou encore

$$\forall \sigma \in \Lambda^1, \forall \alpha \in \Lambda^3, \quad c(\sigma \otimes \alpha) = \sigma \wedge \alpha$$

Bien sûr, pour une 3-forme  $\alpha$ ,

$$(3.53) \quad c(\nabla \alpha) = d\alpha$$

Puis on définit

$$\begin{aligned} c_\psi : \Lambda^1 \otimes \mathfrak{su}(M)^\perp &\rightarrow \Lambda^4 \\ \eta &\mapsto c(\eta \cdot \psi) \end{aligned}$$

et de même  $c_\phi$  par  $c_\phi(\eta) = c(\eta \cdot \phi)$ . Alors

**Lemme 3.3.10.** — *Pour une variété  $SU(3)$ ,  $(M, g, \omega, \psi)$ ,*

$$c_\psi(\bar{\eta}_s) = d\psi, \quad c_\phi(\bar{\eta}_s) = d\phi$$

où  $\phi = -J\psi$ .

*Démonstration.* — Ce n'est que l'application de (3.53) à

$$\bar{\eta}_s \cdot \psi = \nabla \psi, \quad \bar{\eta}_s \cdot \phi = \nabla \phi$$

□

Comme  $c_\psi$  est  $SU(3)$ -équivariante, surjective, pour chaque composante irréductible  $V$  de  $\Lambda^4$  il existe un sous-espace invariant  $V^\psi \subset \Lambda^1 \otimes \mathfrak{su}(M)$  telle que la restriction  $c : V^\psi \rightarrow V$  est un isomorphisme de représentations de  $SU(3)$ . On définit de même  $V^\phi$ . On a le raffinement de la proposition 3.3.9 :

**Proposition 3.3.11.** — *Pour une variété  $SU(3)$  on a la décomposition en composantes irréductibles*

$$(3.54) \quad \Lambda^1 \otimes \mathfrak{su}(n)^\perp = W_1^+ \oplus W_1^- \oplus W_2^+ \oplus W_2^- \oplus W_3 \oplus W_4 \oplus W_5$$

où

$$(3.55) \quad W_1^+ = \mathbb{R}^\psi, \quad W_1^- = \mathbb{R}^\phi, \quad W_2^+ = [\lambda_0^{1,1}]^\psi, \quad W_2^- = [\lambda_0^{1,1}]^\phi, \quad W_5 \simeq \Lambda^1$$

*Démonstration.* — Par le lemme 3.3.7 et (3.46)

$$\begin{aligned}\Lambda^4 &= \llbracket \lambda^{3,1} \rrbracket \oplus [\lambda^{2,2}] \\ &\simeq \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket \oplus [\lambda_0^{1,1}] \oplus \mathbb{R} \\ &\simeq \Lambda^2\end{aligned}$$

Alors les composantes irréductibles de  $\Lambda^4$  correspondent par  $c_\psi$  aux sous-espaces de  $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{su}(n)^\perp$ , respectivement  $\mathbb{R}^\psi \subset W_1$ ,  $[\lambda_0^{1,1}]^\psi \subset W_2$ , enfin  $\llbracket \lambda^{3,1} \rrbracket^\psi \subset W_4 \oplus W_5$ . D'un autre côté on a aussi bien sûr  $\mathbb{R}^\phi \subset W_1$ ,  $[\lambda_0^{1,1}]^\phi \subset W_2$ ,  $\llbracket \lambda^{3,1} \rrbracket^\phi \subset W_4 \oplus W_5$ . Il faut seulement vérifier que  $\mathbb{R}^\psi \cap \mathbb{R}^\phi = \{0\}$ , de même  $[\lambda_0^{1,1}]^\psi$ ,  $[\lambda_0^{1,1}]^\phi$  sont en somme directe mais  $\llbracket \lambda^{3,1} \rrbracket^\psi = \llbracket \lambda^{3,1} \rrbracket^\phi$ .  $\square$

On peut alors définir des classes de variétés  $SU(3)$  comme pour les variétés presque hermitiennes. Cependant cette définition contrairement à celle de Gray, Hervella dépend d'un choix arbitraire au point de vue des représentations car 3 composantes isotypiques,  $W_1$ ,  $W_2$  et  $W_4 \oplus W_5$ , ont une multiplicité strictement supérieure à 1. L'important pour nous est la façon dont est déterminée dans la structure  $SU(3)$  la structure presque hermitienne, surtout les composantes dans  $W_1$ ,  $W_2$  de la torsion intrinsèque.

**Proposition 3.3.12.** — *Soit  $M$  une variété spéciale presque hermitienne de dimension 6. Il existe  $n_1, m_1 \in \mathbb{R}$  et  $\nu_2, \mu_2 \in [\lambda_0^{1,1}]$  telles que*

$$(3.56) \quad (d\psi)^{2,2} = n_1 \omega \wedge \omega + \nu_2 \wedge \omega$$

$$(3.57) \quad (d\phi)^{2,2} = m_1 \omega \wedge \omega + \mu_2 \wedge \omega$$

Alors

- 1) la composante de  $\bar{\eta}_s$  dans  $W_1^+$  (resp.  $W_1^-$ ) est nulle si et seulement si  $n_1 = 0$  (resp.  $m_1 = 0$ );
- 2) la composante dans  $W_2^+$  (resp.  $W_2^-$ ) est nulle si et seulement si  $\nu_2 = 0$  (resp.  $\mu_2 = 0$ ).

**Corollaire 3.3.13.** — *Soit  $M$  une variété presque hermitienne de dimension 6 admettant une réduction à  $SU(3)$  :*

- 1)  $w_1$  ou  $\xi$  sont nulles si et seulement si  $n_1 = m_1 = 0$  et
- 2)  $w_2$  ou  $\zeta$  sont nulles si et seulement si  $\nu_2 = \mu_2 = 0$ .

On souhaite donner une version plus précise de cette proposition en calculant explicitement  $n_1$  et  $m_1$  :

**Lemme 3.3.14.** — *Pour une variété spéciale presque hermitienne de dimension 6,  $(M, g, \omega, \psi)$ , soit  $\bar{\psi} = (d\omega)^{3,0}$  et  $\bar{\phi} = -J\bar{\psi}$ ,*

$$(3.58) \quad n_1 = -\frac{2}{3}\langle \bar{\phi}, \psi \rangle \quad \text{et} \quad m_1 = -\frac{2}{3}\langle \bar{\phi}, \phi \rangle$$

Avant de le démontrer, on établit un lemme algébrique :

**Lemme 3.3.15.** — *Soit le repère orthonormé  $(e_j)_{j=1,\dots,6}$ , on note  $(e^j)_{j=1,\dots,6}$  le co-repère dual. Soient  $\eta \in \Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(M)$ ,  $\alpha \in \Lambda^p$  :*

$$(3.59) \quad c(\eta.\alpha) = \sum_{j,k=1}^6 e^j \wedge (\eta_{e_j} e_k)^\flat \wedge \iota_{e_k} \alpha$$

Et si  $\eta = \xi$ ,

$$(3.60) \quad (\xi.\alpha)_X = -\frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \iota_X(\iota_{e_j} \bar{\phi}) \wedge \iota_{e_j} \alpha$$

$$(3.61) \quad \xi.\bar{\phi} = -\frac{1}{24} |\bar{\phi}|^2 \omega \wedge \omega$$

$$(3.62) \quad c(\xi.\alpha) = -\frac{1}{6} \langle \bar{\phi}, \alpha \rangle \omega \wedge \omega$$

*Démonstration.* — L'action du fibré adjoint est donnée par

$$\forall A \in \mathfrak{so}(M), \quad A.\alpha = \sum_{j=1}^6 (Ae_j)^\flat \wedge \iota_{e_j} \alpha$$

dans le repère orthonormé. Quant à  $c$  il vaut

$$(3.63) \quad c(\beta) = \sum_{j=1}^6 e^j \wedge \beta_{e_j}$$

On en déduit premièrement (3.59).

Par (3.26),  $(\xi_X Y)^\flat = -\frac{1}{6}\iota_X(\iota_Y \bar{\phi})$  d'où (3.60) puis

$$\begin{aligned} c(\xi, \alpha) &= -\frac{1}{6} \sum_{j,k=1}^6 e^j \wedge \iota_{e_j}(\iota_{e_k} \bar{\phi}) \wedge \iota_{e_k} \alpha \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{j=1}^6 \iota_{e_j} \bar{\phi} \wedge \iota_{e_k} \alpha \end{aligned}$$

En effet, pour toute  $p$  forme  $\gamma$ ,

$$(3.64) \quad \sum_{j=1}^6 e^j \wedge \iota_{e_j} \gamma = p\gamma$$

En utilisant l'expression du produit scalaire (3.40) on obtient (3.62). En outre, lorsque  $\alpha = \bar{\phi}$ ,

$$\iota_X(\iota_{e_j} \bar{\phi}) \wedge \iota_{e_j} \bar{\phi} = \frac{1}{2} \iota_X(\iota_{e_j} \bar{\phi} \wedge \iota_{e_j} \bar{\phi})$$

par conséquent  $\xi \cdot \bar{\phi}$  est déjà une 4-forme sans passer par l'antisymétrisation  $c$ .  $\square$

La démonstration du lemme 3.3.14 est maintenant immédiate, en se rappelant que la composante de  $\xi$  dans  $\mathbb{R}^\psi$  est par définition identifiée à la composante de  $d\psi$  proportionnelle à  $\omega \wedge \omega$  :

$$c(\xi \cdot \psi) = n_1 \omega \wedge \omega$$

et de même

$$c(\xi \cdot \phi) = m_1 \omega \wedge \omega$$

Quant aux composantes dans  $W_2 \simeq 2[\lambda_0^{1,1}]$  on écrit seulement

$$(3.65) \quad \nu_2 \wedge \omega = c(\zeta \cdot \psi) \quad \text{et} \quad \mu_2 \wedge \omega = c(\zeta \cdot \phi)$$

**Remarque :** Puisque  $w_i$ ,  $i = 1, 2$ , est identifié à  $N_i$ , on peut donner une autre preuve de (3.58) en passant par le tenseur de Nijenhuis. En effet, rappelons 3.1.5 que  $N = 0$  si et seulement si, pour toute forme  $\alpha \in \lambda^{p,q}$ ,  $d\alpha$  est de type  $(p+1, q) + (p, q+1)$ . Autrement dit pour une variété presque hermitienne quelconque la partie de type  $(p-1, q+2)$  – ou  $(p+2, q-1)$  – de  $d\alpha$  est donnée par le tenseur de Nijenhuis. Soit  $\alpha$  une forme de type  $(p, 0)$ . On a l'équation, généralisant (3.9),

$$(3.66) \quad (d\alpha)^{p-1,2}(X_0, \dots, X_p) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha(N(X_i, X_j), X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p)$$



Par la formule inscrite au membre de droite de (3.66) on définit un produit, noté  $\# : (\Lambda^2 \otimes TM) \times \Lambda^p \rightarrow \Lambda^{p+1}$ . On note  $j$  un analogue du produit intérieur défini par

$$\forall T \in \Lambda^2 \otimes TM, \quad j_X T(Y, Z) = \langle T(Y, Z), X \rangle$$

Alors

$$\forall T \in \Lambda^2 \otimes TM, \quad \forall \alpha \in \Lambda^p, \quad T \# \alpha = - \sum_{i=1}^6 j_{e_i} T \wedge \iota_{e_i} \alpha$$

dans un repère local orthonormé. Remarquons que  $j_X N_1 = \frac{1}{3} \iota_X \bar{\phi}$  par (3.26), (3.29).

La 3-forme  $\psi$  est de type (3,0)+(0,3). Donc

$$(d\psi)^{2,2} = N \# \alpha = N_1 \# \alpha + N_2 \# \alpha$$

où

$$\begin{aligned} N_1 \# \psi &= -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 \iota_{e_i} \bar{\phi} \wedge \iota_{e_i} \psi \\ &= -\frac{1}{6} \langle \bar{\phi}, \psi \rangle \omega \wedge \omega \end{aligned}$$

par (3.40). De même pour  $\phi$ . En comparant avec (3.56), (3.57) on obtient bien (3.58) mais aussi (3.65) par

$$(3.67) \quad \nu_2 \wedge \omega = N_2 \# \psi \quad \text{et} \quad \mu_2 \wedge \omega = N_2 \# \phi$$

On s'intéresse maintenant à  $(d\psi)^{3,1}$ ,  $(d\phi)^{3,1}$ .

**Proposition 3.3.16.** — *Pour une variété SU(3), il existe une 1-forme  $\sigma$  telle que*

1) *La composante de  $\bar{\eta}_s$  dans  $W_5$ ,  $\varsigma$  est nulle si et seulement si  $\sigma = 0$  (NB : on a toujours que  $\vartheta \in W_4$  est nulle si et seulement si  $\theta$ , la forme de Lee, est nulle).*

2)  *$(d\psi)^{3,1} = -(J\sigma + \theta) \wedge \psi$  et  $(d\phi)^{3,1} = -(J\sigma + \theta) \wedge \phi$ .*

*Démonstration.* — Les sous-espaces stables, isomorphes à  $[[\lambda^{3,1}]] \simeq \Lambda^1$  de  $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{su}(n)^\perp$  sont  $W_4$  et  $W_5$ . Donc

$$(d\psi)^{3,1} = c(\vartheta \cdot \psi + \varsigma \cdot \psi)$$

Le deuxième terme, dans le membre de droite, est

$$\varsigma \cdot \psi = \bar{\eta}_s \cdot \psi - \bar{\eta} \cdot \psi = \bar{\nabla} \psi$$

Or  $\bar{\nabla}$  est une connexion hermitienne donc elle préserve les types :  $\forall X \in TM, \bar{\nabla}_X \psi \in [\lambda^{3,0}]$  c'est-à-dire est une combinaison linéaire de  $\psi$  et  $\phi$ . Mais d'autre part

$$\forall X \in TM, \quad \langle \bar{\nabla}_X \psi, \psi \rangle = \frac{1}{2} X.|\psi|^2 = 0$$

car  $\psi$  est de norme constante. Finalement, il existe une 1-forme  $\sigma$  telle que  $\forall X \in TM, \bar{\nabla}_X \psi = \sigma(X)\phi$  soit

$$(3.68) \quad \bar{\nabla} \psi = \sigma \otimes \phi$$

Puis

$$(3.69) \quad c(\varsigma.\psi) = \sigma \wedge \phi = -J\sigma \wedge \psi$$

par 3.3.3 (iii).

En outre, puisque  $\bar{\nabla}$  préserve  $J$ , on a aussi par (3.34)

$$\bar{\nabla} \phi = -\sigma \otimes \psi$$

d'où

$$(3.70) \quad c(\varsigma.\phi) = -J\sigma \wedge \phi$$

En ce qui concerne  $\vartheta$ , les choses sont plus compliquées et on doit utiliser un repère orthonormé. On substitue dans (3.59) à  $\eta$  l'expression (3.27) de  $\vartheta$  en fonction de  $\theta$  :

$$4(\vartheta_{e_j} e_k)^\flat = \delta_{jk} \theta - \theta(e_k) e^j - g(Je_j, e_k) J\theta + J\theta(e_k) J e^j$$

On a

$$\begin{aligned} 4c(\vartheta.\psi) &= \sum_{j=1}^6 e^j \wedge \theta \wedge \iota_{e_j} \psi + \sum_{j,k=1}^6 g(Je_k, e_j) e^j \wedge J\theta \wedge \iota_{e_k} \psi + \sum_{j,k=1}^6 e^j \wedge J e^k \wedge J\theta(e_k) \iota_{e_k} \psi \\ &= -\theta \wedge \sum_{j=1}^6 e^j \wedge \iota_{e_j} \psi - J\theta \wedge \sum_{j=1}^6 J e^j \wedge \iota_{J e_j} \psi + 2\omega \wedge \iota_{J\theta^\sharp} \psi \end{aligned}$$

en tenant compte de (3.42). Puis, par (3.64)

$$4c(\vartheta.\psi) = -3\theta \wedge \psi - 3J\theta \wedge \phi + 2\omega \wedge \iota_{J\theta^\sharp} \psi$$

Enfin, en utilisant le lemme 3.3.3,

$$(3.71) \quad c(\vartheta.\psi) = -\theta \wedge \psi$$

Bien sûr on obtiendrait de même (cela ne dépend que du type algébrique de la 3-forme)

$$(3.72) \quad c(\vartheta.\phi) = -\theta \wedge \phi$$

Les équations (3.69), (3.70) et (3.71), (3.72) permettent finalement de prouver à la fois les points 1) et 2).  $\square$

En corollaire, on a l'équation de Salamon et Chiossi :

$$\iota_\psi \psi = \iota_\phi \phi$$

En résumé, pour obtenir la projection de  $\bar{\eta}_s$  dans la composante isotypique  $2\Lambda^1$ ,  $d\psi$ ,  $d\phi$  ne suffisent pas, contrairement à  $W_1 \simeq 2\mathbb{R}$  et  $W_2 \simeq [\lambda_0^{1,1}]$  (voir la proposition 3.3.11) mais on a besoin de  $d\omega$  car  $[\lambda^{3,1}]^\psi = [\lambda^{3,1}]^\phi$ . De plus, ce dernier sous-espace est diagonal par rapport à la somme directe  $W_4 \oplus W_5$ .

Cependant, de même que  $N$  et  $d\omega$  suffisent à calculer toutes les composantes de  $\bar{\eta}$ , ici on a le fait fondamental suivant :

**Remarque :** Les différentielles de  $\psi$ ,  $\phi$  et  $\omega$  déterminent entièrement la torsion intrinsèque de la structure  $SU(3)$ . En particulier une variété  $SU(3)$  est Kähler, Ricci-plate si et seulement si  $d\omega = d\psi = d\phi = 0$ . Cela permet d'employer des méthodes utilisant des formes différentielles, sans avoir recours à la métrique, chaque fois qu'on peut réduire une variété presque hermitienne de dimension 6 à  $SU(3)$ . En dimension supérieure à 8, F. Cabrera [15] a même montré que toute l'information pour la torsion intrinsèque est contenue dans  $d\omega$  et  $d\psi$  ou  $d\phi$ .



## CHAPITRE 4

# VARIÉTÉS APPROXIMATIVEMENT KÄHLERIENNES ET VARIÉTÉS DE GRAY

### 4.1. Structure $SU(3)$ naturelle d'une variété de Gray

On commence par une définition.

**Définition 4.1.1.** — *Une variété approximativement kählérienne est une variété de type  $W_1$  dans la classification de Gray, Hervella.*

Le mot anglais est « nearly-Kähler ». On notera souvent simplement dans la suite NK. Vu les définitions des composantes  $W_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , une variété NK a les propriétés élémentaires suivantes :

**Lemme 4.1.2.** — *Soit  $(M, g, \omega)$  une variété NK,*

*(i)  $\nabla\omega$  est une 3-forme :  $\nabla\omega = \frac{1}{3}d\omega$ .*

*(ii)  $\bar{\eta}$  est totalement antisymétrique :  $\bar{\eta}_X Y = -\bar{\eta}_Y X$ .*

*(iii)  $d\omega$  est de type  $(3, 0) + (0, 3)$  :  $d\omega = \bar{\psi}$ .*

*(iv)  $d\omega \wedge \omega = 0$ .*

*(v) Le tenseur de Nijenhuis  $N$  est totalement antisymétrique.*

Les deux premiers points sont équivalents à la définition 4.1.1 car  $(\Lambda^1 \otimes \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket) \cap \Lambda^3 = W_1$ . Les points (iii) et (iv) sont équivalents : ils caractérisent les variétés quasi-kähleriennes c'est-à-dire de type  $W_1 \oplus W_2$ . Enfin (v) caractérise les variétés de type  $G_1$  (voir la définition de cette classe dans [33]) ou  $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ , dans le formalisme de Gray, Hervella.

Les tenseurs  $w_2, w_3, w_4$  (ou  $\zeta, \chi, \vartheta$ ) sont donc nuls et la torsion intrinsèque est  $\bar{\eta} = \xi$  pour une variété NK. Elle est identiquement nulle si et seulement si  $w_1, N_1$  ou  $\bar{\psi}$  sont nuls. Par conséquent la classe des variétés NK est orthogonale à la classe des variétés

hermitiennes (caractérisée par  $N = 0$ , c'est-à-dire  $\nabla\omega \in W_3 \oplus W_4$ ) mais aussi à la classe des variétés symplectiques (ou « presque kähleriennes » :  $d\omega = 0$  c'est-à-dire  $\nabla\omega \in W_2$ ) :

**Lemme 4.1.3.** — *Soit  $(M, g, \omega)$  une variété NK. La structure presque complexe est intégrable,  $N = 0$ , si et seulement si  $M$  est kählérienne. De même la forme de Kähler est fermée,  $d\omega = 0$ , si et seulement si la variété est kählérienne.*

En dimension 6, on distingue des variétés NK, non kähleriennes :

**Définition 4.1.4.** — *On appelle variété de Gray une variété NK de dimension 6 telle que la norme de  $d\omega$  est constante, non nulle.*

Cette hypothèse peut paraître arbitraire mais il s'avère que les variétés de Gray occupent une place centrale parmi les variétés NK : en dimension 6, une variété NK est kählérienne ou de Gray (voir proposition 4.2.5) et ces dernières jouent un rôle crucial dans la classification de Nagy [43] en dimension quelconque. Elles se trouvent de plus au croisement de la géométrie presque hermitienne et de l'holonomie faible telle que la notion en sera précisée à la section 3.

Les variétés de Gray ont une réduction naturelle à  $SU(3)$ . Quitte à pratiquer une homothétie dans la variété, on peut supposer que la norme de  $d\omega$  est 2, en accord avec la convention choisie pour la 3-forme  $\psi$  définissant une réduction à  $SU(3)$  au chapitre précédent.

**Définition 4.1.5.** — *On appelle structure  $SU(3)$  naturelle d'une variété de Gray la réduction de  $U(M)$  obtenue en posant*

$$\psi := d\omega = \overline{\psi}$$

On peut dès lors appliquer les résultats du chapitre 3, section 3.

En outre, la connexion hermitienne canonique est la connexion intrinsèque de la structure  $SU(3)$  :

**Lemme 4.1.6.** — *La torsion intrinsèque d'une variété de Gray est parallèle pour la connexion hermitienne canonique  $\overline{\nabla}$  :*

$$(4.1) \quad \overline{\nabla}\overline{\eta} = 0$$

*De façon équivalente,  $\overline{\nabla} = \overline{\nabla}_s$ .*

*Démonstration.* — La 3-forme servant à définir la structure  $SU(3)$  naturelle d'une variété de Gray est exacte donc fermée, d'où  $(d\psi)^{3,1} = (d^2\omega)^{3,1} = 0$ . La composante de  $\nabla\omega$  dans  $W_4$  est nulle pour une variété NK, d'où  $\theta = 0$ . Par la proposition 3.3.16,  $(d\psi)^{3,1}$  et  $\theta$  sont associés à des sous-espaces irréductibles supplémentaires de la composante isotypique  $2\Lambda^1$  de  $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{su}(3)^\perp$ . S'ils sont nuls à la fois,  $\varsigma \in W_5 \simeq \Lambda^1$  ou  $\sigma$  sont nuls aussi d'où  $\bar{\eta}_s = \bar{\eta}$  par le lemme 3.3.8 puis  $\bar{\nabla}_s = \bar{\nabla}$ . En particulier  $\bar{\nabla}$  est une connexion  $SU(3)$  :

$$(4.2) \quad \bar{\nabla}\psi = \sigma \otimes \phi = 0$$

De plus,  $\psi$  et  $\bar{\eta} = \xi$  sont liés par (3.26) donc les équations (4.1) et (4.2) sont équivalentes.  $\square$

Le lemme 4.1.6 est en fait valable pour une variété NK quelconque comme on verra à la section 2.

Le groupe  $SU(3)$  est le « bon » groupe structural à considérer. On en verra une confirmation dans la forme de la courbure calculée au chapitre suivant.

**Proposition 4.1.7.** — *Les variétés de Gray sont les variétés  $SU(3)$  de type  $W_1^-$ , non kähleriennes dans la classification de Chiossi, Salamon [16].*

*Démonstration.* — Une variété de Gray est de type  $W_1$  comme variété presque hermitienne. De plus,  $\bar{\eta}_s = \bar{\eta}$  par le lemme 4.1.6 donc  $\bar{\eta}_s \in W_1$ . Enfin  $\psi = d\omega$  implique  $d\psi = 0$  d'où  $n_1 = 0$ .

Réciproquement, si  $\bar{\eta}_s \in W_1^-$ ,  $\bar{\eta}_s = \bar{\eta}$  et la variété presque hermitienne est de type  $W_1$ , c'est-à-dire NK. En particulier  $d\omega$  est de type  $(3,0) + (0,3)$  donc on peut l'écrire

$$d\omega = \lambda\psi + \mu\phi$$

En prenant la dérivée extérieure :

$$0 = d^2\omega = d\lambda \wedge d\psi + \lambda d\psi + d\mu \wedge \phi + \mu d\phi$$

Or  $d\phi$  est de type  $(2,2)$  pour une variété de type  $W_1^+ \oplus W_1^-$  mais  $d\lambda \wedge d\psi$  et  $d\mu \wedge \phi$  sont de type  $(3,1)$  et  $d\psi = 0$  car  $n_1 = 0$ . On a donc  $\mu = 0$  puis  $d\lambda = 0$  c'est-à-dire  $\lambda$  est constante,

$$d\omega = \lambda\psi$$

Si  $\lambda$  est non nulle,  $M$  est finalement une variété de Gray munie de sa structure  $SU(3)$  naturelle.  $\square$

Grâce à la remarque faite à la fin du chapitre précédent que la torsion intrinsèque, donc la classe d'une variété  $SU(3)$ , ainsi que la classe de la variété presque hermitienne sous-jacente, ne dépendent que des différentielles de  $\psi$ ,  $\phi$ ,  $\omega$ , les variétés NK non kähleriennes en dimension 6 sont caractérisées par un système différentiel :

**Proposition 4.1.8 (Reyes Carrión).** — *Une variété  $SU(3)$ ,  $(M, g, \omega, \psi)$  est une variété de Gray si et seulement si sa structure  $SU(3)$  vérifie :*

$$(4.3a) \quad \psi = d\omega$$

$$(4.3b) \quad d\phi = -\frac{2}{3}\omega \wedge \omega$$

On peut compléter ce système par l'équation

$$(4.4) \quad d\psi = 0$$

déduite évidemment de (4.3a).

*Démonstration.* — D'abord si la variété  $SU(3)$  vérifie (4.3), par (4.3a),  $d\omega$  est de type  $(3,0)+(0,3)$  donc la variété est de type  $W_1 \oplus W_2$ . Puis, par (4.3b),  $d\phi$  est proportionnelle à  $\omega \wedge \omega$  i.e. sa projection sur  $[\lambda_0^{1,1}] \subset [\lambda^{2,2}]$  est nulle donc  $\mu_2 = 0$ . En outre  $\nu_2 = 0$  évidemment à cause de (4.4). Alors, par le corollaire 3.3.13, la composante de  $\nabla\omega$  dans  $W_2$  est nulle, c'est-à-dire que la variété est finalement de type  $W_1$ , ou NK.

Réciproquement si  $M$  est une variété de Gray munie de sa structure  $SU(3)$  naturelle, par définition on a (4.3a). Par la proposition 3.3.16,  $(d\psi)^{3,1} = 0$  implique  $(d\phi)^{3,1} = 0$ . La composante de  $d\phi$  dans  $[\lambda_0^{1,1}] \subset [\lambda^{2,2}]$  est nulle aussi car  $w_2 = 0$ . Enfin, comme  $\bar{\psi} = \psi$ ,  $\bar{\phi} = \phi$ ,  $m_1 = -\frac{1}{6}|\psi|^2 = -\frac{2}{3}$  par le lemme 3.3.14 d'où (4.3b).  $\square$

C'est en étudiant cette équation différentielle, à l'aide de la théorie de Cartan-Kähler, que Reyes Carrión ([47], p62) peut démontrer l'existence locale des variétés NK en dimension 6.

## 4.2. Courbure et torsion intrinsèque d'une variété NK

On a défini les variétés de Gray comme des variétés presque hermitiennes à torsion intrinsèque totalement antisymétrique puis on a décrit leur structure  $SU(3)$  naturelle. Vus les résultats collectés dans ce chapitre et le précédent on peut se demander si elles ne devraient pas plutôt d'emblée être définies comme des variétés  $SU(3)$ .



En effet, on a le résultat dû à Cleyton [17], p58,

**Lemme 4.2.1.** — *Soit  $M$  une variété  $SU(n)$ . Si la torsion intrinsèque est totalement antisymétrique, la variété presque hermitienne sous-jacente est NK.*

*Démonstration.* — On montre

$$\Lambda^1 \otimes \mathfrak{su}(M)^\perp \cap \Lambda^3 = W_1$$

Alors  $\bar{\eta}_s \in \Lambda^3$  si et seulement si  $\bar{\eta}_s \in W_1$  ce qui implique en particulier que  $\bar{\eta} \in W_1$ .

On sait que  $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(M)^\perp \cap \Lambda^3 = W_1$ . Or  $\mathfrak{su}(M)^\perp \simeq \mathfrak{u}(M)^\perp \oplus \Lambda^1$ . Par conséquent, il suffit de vérifier que le sous-espace isomorphe à  $\Lambda^1$ ,  $\{\kappa \wedge \omega \mid \kappa \in \Lambda^1\} \subset \Lambda^3$ , orthogonal à  $W_4$ , est encore orthogonal à la somme  $W_4 \oplus W_5 \simeq 2\Lambda^1$ .

$$\kappa \wedge \omega(X, Y, Z) = \kappa(X)\omega(Y, Z) - \kappa(Y)\omega(X, Z) + \kappa(Z)\omega(X, Y)$$

ce qu'on réécrit avec le même abus de notation que précédemment :

$$(\kappa \wedge \omega)_X = (\kappa \otimes \omega)_X + JX^\flat \wedge \kappa$$

La projection sur  $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(M)$ ,

$$q_-(\kappa \wedge \omega)_X = (\kappa \otimes \omega)_X + \frac{1}{2}(JX^\flat \wedge \kappa - X^\flat \wedge J\kappa)$$

appartient à  $W_5 = \Lambda^1 \otimes \mathbb{R}\omega$  si et seulement si  $\kappa = 0$ . Par conséquent  $\kappa \wedge \omega \in W_4 \oplus W_5$  si et seulement si il est nul.  $\square$

On énonce maintenant un résultat fondamental pour les variétés NK, généralisant 4.1.6, du à Belgun, Moroianu [6] ou avant eux Kirichenko [37] :

**Proposition 4.2.2.** — *La torsion intrinsèque d'une variété NK est parallèle pour la connexion hermitienne canonique*

$$\bar{\nabla}\bar{\eta} = 0$$

C'est A. Gray lui-même qui l'avait démontré implicitement, sans faire le lien avec  $\bar{\nabla}$ . En effet, on lui doit la formule dans [30] :

$$2g((\nabla^2 J)_{X,Y}Z, T) = \mathfrak{S}\{g((\nabla J)_X Y, (\nabla J)_Z J T)\}$$

qu'on réécrit

$$\nabla^2 \omega = \bar{\eta} \cdot \nabla \omega$$

En effet,  $\bar{\eta}$  ou  $\nabla J$  sont totalement antisymétriques donc

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta} \cdot \nabla \omega(X, Y, Z, T) &= -g((\nabla_{\bar{\eta}_X Y} J)Z, T) - g((\nabla_Y J)\bar{\eta}_X Z, T) - g((\nabla_Y J)Z, \bar{\eta}_X T) \\
 &= -g(\bar{\eta}_X Y, (\nabla_Z J)T) - g(\bar{\eta}_Z X, (\nabla_Y J)T) - g((\nabla_Y J)Z, \bar{\eta}_X T) \\
 (4.5) \qquad &= -\frac{1}{2} \mathfrak{S}\{g((\nabla_X J)Y, (\nabla_Z J)JT)\}
 \end{aligned}$$

Alors

$$\bar{\nabla}(\nabla \omega) = \nabla(\nabla \omega) - \bar{\eta} \cdot \omega = 0$$

On va donner une nouvelle démonstration de la proposition 4.2.2, conceptuellement proche de celle de Gray. Auparavant on a besoin d'un lemme. Soit  $\eta \in \Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(M)$ . On définit les tenseurs  $\eta \circ \eta$  et  $\eta^2 \in \Lambda^1 \otimes \Lambda^1 \otimes \mathfrak{gl}(M)$  par

$$(\eta \circ \eta)_{X,Y} = \eta_X \circ \eta_Y$$

et

$$g(\eta_{X,Y}^2 Z, T) = g(\eta_X Y, \eta_Z T)$$

On voit que

$$[\eta, \eta] = a(\eta \circ \eta)$$

**Lemme 4.2.3.** — Soit le tenseur totalement antisymétrique  $\xi \in \Lambda^3 \subset \Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(M)$ . Les tenseurs  $[\xi, \xi]$  et  $\xi^2$  appartiennent au sous-espace  $\odot^2(\Lambda^2) \subset \Lambda^2 \otimes \mathfrak{so}(M)$ . De plus

$$(4.6) \qquad \xi \cdot \xi = -\xi^2 + [\xi, \xi]$$

et

$$(4.7) \qquad \xi \cdot \xi = b(\xi \circ \xi) = -b(\xi^2) = \frac{1}{2}b([\xi, \xi]) \in \Lambda^4$$

*Démonstration.* — Comme  $\xi_X Y = -\xi_Y X$ ,  $\xi^2 \in \Lambda^2 \otimes \mathfrak{so}(M) \simeq \Lambda^2 \otimes \Lambda^2$ . De plus il est évident par sa définition qu'il est symétrique par paires :  $\xi^2 \in \odot^2(\Lambda^2)$ . Par ailleurs

$$g((\xi^2)_{X,Y} Z, T) = g(\xi_X Y, \xi_Z T) = g(\xi_{\xi_X Y} Z, T)$$

donc

$$\xi \cdot \xi = -\xi^2 + [\xi, \xi]$$

c'est-à-dire

$$(4.8) \qquad g((\xi \cdot \xi)_{X,Y} Z, T) = -g(\xi_X Y, \xi_Z T) - g(\xi_Z X, \xi_Y T) - g(\xi_Y Z, \xi_X T)$$

analogue à (4.5). On reconnaît  $\xi \cdot \xi = -b(\xi^2)$  mais aussi  $\xi \cdot \xi = b(\xi \circ \xi)$  compte-tenu de

$$g((\xi \circ \xi)_{X,Y} Z, T) = g(\xi_X \xi_Y Z, T) = -g(\xi_X T, \xi_Y Z)$$

Enfin on vérifie sur (4.8) que  $\xi.\xi \in \Lambda^4$ . Par conséquent on a aussi  $[\xi, \xi] = \xi.\xi + \xi^2 \in \odot^2(\Lambda^2)$ .  $\square$

Pour une variété presque hermitienne,  $\xi \in W_1$ . Dans ce cas, que  $\xi.\xi$  soit une 4-forme résultait déjà de (3.61). En effet  $\xi$  est identifié via la métrique à  $\bar{\phi}$  (ou  $\phi$  pour une variété de Gray munie de sa structure  $SU(3)$  naturelle). Par conséquent,

$$\xi.\xi \in \mathbb{R}\omega \wedge \omega$$

On peut maintenant démontrer la proposition 4.2.2.

*Démonstration.* — Pour une variété NK,  $\bar{\eta} = \xi \in W_1 \subset \Lambda^3$  donc on peut réécrire (1.37) pour la connexion intrinsèque  $\bar{\nabla}$ , en utilisant le lemme 4.2.3.

$$(4.9) \quad R = \bar{R} + a(\bar{\nabla}\xi) + 2\xi.\xi - [\xi, \xi]$$

Comme  $\xi \in \Lambda^3$ ,  $\bar{\nabla}\xi \in \Lambda^1 \otimes \Lambda^3$  et par le lemme 1.2.32,  $a(\bar{\nabla}\xi) \in \Lambda^2(\Lambda^2) \oplus \Lambda^4$ . D'autre part  $\bar{\nabla}$  est une connexion hermitienne donc  $\bar{\eta} \in \Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(M)^\perp$  implique  $\bar{\nabla}\xi = \bar{\nabla}\bar{\eta} \in \Lambda^1 \otimes \Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(M)^\perp$  et finalement

$$a(\bar{\nabla}\xi) \in (\Lambda^2 \otimes \mathfrak{u}(M)^\perp) \cap (\Lambda^2(\Lambda^2) \oplus \Lambda^4)$$

Or dans (4.9),  $R \in \mathcal{K}(\mathfrak{so}(m))$ , orthogonal à  $\Lambda^2(\Lambda^2) \oplus \Lambda^4$  par 1.33 et  $\bar{R} \in \Lambda^2 \otimes \mathfrak{u}(M)$ , orthogonal à  $\Lambda^2 \otimes \mathfrak{u}(n)^\perp$  donc ils sont tous les deux orthogonaux à  $a(\bar{\nabla}\xi)$ . En ce qui concerne les deux derniers termes, on décompose leur somme

$$2\xi.\xi - [\xi, \xi] = (2\xi.\xi - 3[\xi, \xi]) + 2[\xi, \xi]$$

où

$$b(2\xi.\xi - 3[\xi, \xi]) = 3b([\xi, \xi]) - 3b([\xi, \xi]) = 0$$

par (4.8) c'est-à-dire  $2\xi.\xi - 3[\xi, \xi] \in \mathcal{K}(\mathfrak{so}(m))$  et  $[\xi, \xi] \in \Lambda^2 \otimes \mathfrak{u}(M)$  (en effet,  $\xi$  anticommute à  $J$  donc  $\xi \circ \xi$  commute avec  $J$ ).

Finalement  $a(\bar{\nabla}\xi)$  est orthogonal à n'importe quel autre tenseur de (4.9) donc il doit être nul. L'application  $a$  est injective sur  $\Lambda^1 \otimes \Lambda^3$  donc  $\bar{\nabla}\xi = 0$ .  $\square$

En fait ce raisonnement est presque entièrement valable pour une  $G$ -structure quelconque lorsque la torsion intrinsèque est totalement antisymétrique. En particulier on a toujours  $\bar{R} \in \Lambda^2 \otimes \mathfrak{g}$ . On a seulement besoin de l'hypothèse supplémentaire, vérifiée par  $U(n)$ ,

$$(4.10) \quad [\mathfrak{g}^\perp, \mathfrak{g}^\perp] \subset \mathfrak{g}$$

Cependant (4.10) s'interprète :  $SO(m)/G$  est localement symétrique. En consultant la liste des espaces symétriques compacts, on voit qu'il n'y a qu'une autre possibilité :  $\mathfrak{g} =$

$\mathfrak{so}(p) \times \mathfrak{so}(q)$ ,  $p + q = m$ . Cette remarque est faite par Cleyton dans [17], p39. Il reste tout de même que

**Lemme 4.2.4.** — *Pour une  $G$ -structure,  $G \subset SO(m)$ , à torsion intrinsèque  $\bar{\nabla} \in \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}^\perp$  totalement antisymétrique, la dérivée covariante  $\bar{\nabla}\bar{\eta}$  est déterminée par la projection de  $[\bar{\eta}, \bar{\eta}]$  dans  $\Lambda^2 \otimes \mathfrak{g}^\perp$ .*

Une conséquence importante de la proposition 4.2.2 est la suivante. Comme  $\bar{\nabla}$  est une connexion métrique,  $\bar{\nabla}d\omega = 0$  implique que  $d\omega$  est de norme constante.

**Proposition 4.2.5.** — *Soit  $M$  une variété NK de dimension 6. Les deux seules possibilités sont :*

- (i)  $M$  est kählérienne
- (ii)  $M$  est une variété de Gray

On peut alors se concentrer sur les secondes. Cette classification sommaire des variétés NK de dimension 6 avait été obtenue par Gray [30]. Les variétés de Gray sont les variétés NK de *type constant*, pour lui.

Ce qu'on a montré à la section précédente est finalement valable pour toute variété NK, non kählérienne. On peut voir la proposition (4.2.5) comme un cas particulier d'une proposition en dimension quelconque, due à Nagy [42].

**Définition 4.2.6.** — *On dit qu'une variété  $M$ , NK est strictement approximativement kählérienne (SNK) si*

$$\forall X \in TM, \quad \xi_X \neq 0$$

**Proposition 4.2.7.** — *Une variété NK,  $M$ , complète, simplement connexe est le produit riemannien d'une variété kählérienne par une variété SNK.*

*Démonstration.* — Soit  $E_1$  la distribution de  $TM$  formée du noyau de  $X \mapsto \xi_X$ . Comme  $\xi = \bar{\eta}$  est  $\bar{\nabla}$ -parallèle,  $E_1$  est  $\bar{\nabla}$ -parallèle. Or sur  $E_1$ , la connexion de Levi-Civita et la connexion hermitienne canonique coïncident :

$$\forall X \in TM, \forall Y \in E_1, \quad \nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y + \xi_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \xi_Y X = \bar{\nabla}_X Y$$

Donc  $E_1$  est finalement  $\nabla$ -parallèle. Maintenant, la distribution orthogonale  $E_2$  est aussi  $\nabla$ -parallèle car  $\nabla$  est métrique. Par le théorème de De Rham, vues les hypothèses sur la variété,  $E_1$ ,  $E_2$  sont les espaces tangents de deux variétés  $M_1$ ,  $M_2$  dont  $M$  est le produit.

Sur la première,  $\xi = 0$  c'est-à-dire  $\nabla\omega = 0$  donc elle est kählérienne. Sur la deuxième :

$$\forall X \in TM, \forall Y \in E_1, \quad \xi_X Y = -\xi_Y X = 0$$

Donc si  $\xi_X$  est nul sur  $E_2$ , il est identiquement nul sur l'espace tangent c'est-à-dire  $X \in E_1$ . Par conséquent  $M_2$  est SNK.  $\square$

En dimension 2 ou 4,  $W_1 \simeq \llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket = \{0\}$  donc les variétés NK sont kähleriennes. C'est pourquoi par la proposition 4.2.7 en dimension 6 il ne reste que les 2 possibilités :  $M$  est kählerienne ou  $M$  est SNK.

On peut maintenant démontrer le résultat célèbre de Gray :

**Theorème 4.2.8.** — *Les variétés de Gray (ou les variétés SNK de dimension 6) sont d'Einstein.*

On commence par un lemme

**Lemme 4.2.9.** — *La courbure hermitienne de la connexion intrinsèque d'une variété NK est symétrique par paires :  $\bar{R} \in \odot^2(\Lambda^2)$ .*

*Démonstration.* — L'équation (4.9) devient maintenant

$$(4.11) \quad R = \bar{R} - 2\xi^2 + [\xi, \xi]$$

Outre  $\bar{R}$ , tous les tenseurs dans cette équation appartiennent à  $\odot^2(\Lambda^2)$  par le lemme 4.2.3.  $\square$

NB : On peut écrire (4.11) plus explicitement sous la forme

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y, Z, T) &= R(X, Y, Z, T) - \frac{1}{2}g((\nabla_X J)Y, (\nabla_Z J)T) \\ &\quad + \frac{1}{4}(g((\nabla_X J)Z, (\nabla_Y J)T) - g((\nabla_X J)T, (\nabla_Y J)Z)) \end{aligned}$$

C'est la formule donnée par Gray dans [30].

La proposition 4.2.2 implique que l'holonomie de  $\bar{\nabla}$  est strictement incluse dans  $U(n)$  en chaque point si la variété n'est pas kählerienne. En dimension 6, elle est incluse dans  $SU(3)$ .

**Lemme 4.2.10.** — *La courbure hermitienne de la connexion intrinsèque  $\bar{\nabla}$  d'une variété de Gray peut être décomposée en*

$$(4.12) \quad \bar{R} = \bar{R}_0 + \bar{R}^\perp$$

où  $\bar{R}_0 \in \mathcal{K}(\mathfrak{su}(3))$  et  $\bar{R}^\perp$  dépend algébriquement de  $\xi \otimes \xi$  donc appartient à un sous-espace invariant de la représentation de  $SU(3)$  sur  $\Lambda^2 \otimes \mathfrak{su}(3)$  en chaque point. Quant à la courbure riemannienne,

$$(4.13) \quad R \in \mathcal{K}(\mathfrak{su}(3)) \oplus \mathbb{R} R^6$$

où  $R^6$  est le tenseur de courbure de la sphère de dimension 6, munie de sa métrique ronde.

*Démonstration.* — Par le lemme 4.1.6,  $\bar{\nabla}\psi = 0$  donc  $\bar{\nabla}$  est une connexion  $SU(3)$  (en fait  $\bar{\nabla} = \bar{\nabla}_s$ ). Par conséquent  $\bar{R} \in \Lambda^2 \otimes \mathfrak{su}(3)$  et on peut la décomposer comme en (1.40). On obtient (4.12). Puisque  $b(\bar{R})$  dépend algébriquement de  $\xi$  ou  $\psi$ ,  $\bar{R}^\perp$  appartient à un sous-espace invariant de  $\mathcal{K}(\mathfrak{su}(3))^\perp$ . Enfin (4.11) donne la dernière partie du lemme.  $\square$

Il faut bien comprendre que les sous-espaces isomorphes à  $\mathbb{R}$  qui interviennent dans la décomposition de  $R$  ou  $\bar{R}$ , sont distincts. En effet le premier est inclus dans  $\mathcal{K}(\mathfrak{so}(6))$  et le deuxième est inclus dans  $\odot^2 \mathfrak{u}(3)$  mais tous les deux ont une intersection nulle avec  $\mathcal{K}(\mathfrak{u}(3)) = [\sigma_0^{2,2}] \oplus [\lambda_0^{1,1}] \oplus \mathbb{R}$ .

Au contraire, les composantes de  $R$  et  $\bar{R}$  dans  $\mathcal{K}(\mathfrak{su}(3)) = [\sigma_0^{2,2}]$  sont les mêmes.

En vue de ces préliminaires la démonstration du théorème 4.2.8 est maintenant immédiate :

*Démonstration.* — Les variétés à holonomie contenue dans  $SU(3)$  sont d'Einstein et même Ricci-plates. Au niveau de l'algèbre, cela signifie que  $\mathcal{K}(\mathfrak{su}(3))$  n'a pas de composante commune avec  $\Sigma^2$ .

Dès lors, par (4.13), pour que la variété  $M$  soit d'Einstein, il suffit que  $\Sigma_0^2$  n'ait pas de composante irréductible isomorphe à  $\mathbb{R}$ . La représentation de  $SU(3)$  sur l'espace tangent (la représentation standard de  $SU(3)$  de dimension 6) est irréductible. Cela équivaut par le lemme de Schur à

$$(T^*M \otimes T^*M)^{SU(3)} \simeq (T^*M \otimes TM)^{SU(3)} = \{0\}$$

d'où

$$(\Sigma_0^2)^{SU(3)} = \{0\}$$

$\square$

En dimension strictement supérieure à 6, la forme de la courbure est toujours assez simple : par le lemme 4.2.9, en dimension supérieure à 10,

$$\bar{R} \in \odot^2([\lambda^{1,1}]) \simeq \sigma_0^{2,2} \oplus [\lambda_0^{2,2}] \oplus 2[\lambda_0^{1,1}] \oplus 2\mathbb{R}$$

par (2.17) et en dimension 8, par [20],

$$\bar{R} \in \mathcal{K}(\mathfrak{u}(n)) \oplus [\lambda_0^{1,1}] \oplus \mathbb{R} \simeq \sigma_0^{2,2} \oplus 2[\lambda_0^{1,1}] \oplus 2\mathbb{R}$$

mais la variété n'est plus d'Einstein en général. En revanche Nagy [42] a montré que le tenseur de Ricci d'une variété SNK est parallèle donc la courbure scalaire est constante. On est, nous, pour l'instant intéressé par le résultat suivant, conséquence de (1.40), (1.41), valable en particulier pour les variétés NK, et qui sera utile au chapitre 5 :

**Lemme 4.2.11.** — *Soit  $M$  une  $G$ -variété,  $G \subset SO(m)$ , telle que la torsion intrinsèque est parallèle pour la connexion intrinsèque :  $\bar{\nabla}\bar{\eta} = 0$ . Alors*

$$\bar{\nabla}R = \bar{\nabla}\bar{R} = \bar{\nabla}\bar{R}_0$$

où  $\bar{R}$  est la courbure de la connexion intrinsèque et  $\bar{R}_0 \in \mathcal{K}(\mathfrak{g})$ .

### 4.3. Holonomie faible

On peut exprimer autrement le fait énoncé à la proposition 4.2.2 sans passer par la connexion intrinsèque, dans le langage des *formes de Killing*. c'est ce qu'on fera à la proposition 4.3.5. Auparavant on donne quelques définitions.

Un *champ de vecteurs de Killing*  $X \in TM$  est un champ de vecteurs vérifiant

$$\mathcal{L}_X g = 0$$

De façon équivalente

$$\forall Y, Z \in TM, \quad g(\nabla_Y X, Z) = -g(\nabla_Z X, Y)$$

ou encore, en appelant  $\alpha = X^\flat \in \Lambda^1$  la 1-forme duale,  $\nabla\alpha$  est totalement antisymétrique. Pour une  $p$ -forme,

**Définition 4.3.1.** — *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne de dimension  $m$ . On appelle  $p$ -forme de Killing une forme  $\alpha \in \Lambda^p$  telle que sa dérivée covariante pour la connexion de Levi-Civita soit totalement antisymétrique.*

En général, si  $\alpha \in \Lambda^p$ ,  $\nabla\alpha \in \Lambda^1 \otimes \Lambda^p$ . Or, ce dernier espace se décompose en composantes irréductibles en chaque point sous l'action de  $O(m)$  en

$$(4.14) \quad \Lambda^1 \otimes \Lambda^p \simeq \Lambda^{p+1} \oplus T^p \oplus \Lambda^{p-1}$$

On avait déjà écrit cette décomposition en (1.36) pour  $p = 3$ . Une forme de Killing est donc une forme différentielle telle que  $\nabla\alpha$  est à valeurs dans le premier sous-espace :

$$\nabla\alpha \in \Lambda^{p+1}$$

De plus on connaît les composantes de  $\nabla\alpha$  dans (4.14) :

$$\nabla\alpha = \frac{1}{p+1} d\alpha + T\alpha + \frac{1}{m-p+1} \widehat{\delta\alpha}$$

où

$$\forall \beta \in \Lambda^p, \quad \widehat{\beta}_X = X^\flat \wedge \beta$$

**Définition 4.3.2.** — L'opérateur *twisteur*  $T$ , de  $\Omega^p(M)$  dans l'espace des sections de  $T^p$ , est défini pour tout entier  $p$  par

$$T_X\alpha = \nabla_X\alpha - \frac{1}{p+1} \iota_X d\alpha - \frac{1}{m-p+1} X^\flat \wedge \delta\alpha$$

Par conséquent on a les définitions relatives aux autres sous-espaces de (4.14) :

**Définition 4.3.3.** — Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne,

(i) on appelle *forme twisteur* une forme  $\alpha \in \Lambda^p$  telle  $\nabla\alpha$  est à valeurs dans  $\Lambda^{p+1} \oplus \Lambda^{p-1}$  c'est-à-dire  $T\alpha = 0$ .

(ii) on appelle *forme co-Killing* une forme  $\alpha$  telle que  $\nabla\alpha$  est à valeurs dans  $\Lambda^{p-1} \subset \Lambda^1 \otimes \Lambda^p$ , i.e.  $T\alpha = d\alpha = 0$ .

Bien sûr une forme  $\alpha$  est dite *fermée* si  $d\alpha = 0$  et *co-fermée* si  $\delta\alpha = 0$ .

Une variété  $NK$  est une variété presque hermitienne telle que la forme de Kähler  $\omega$  est une forme de Killing :  $\nabla\omega$  est une 3-forme. Cependant, en dimension 6 on a mieux.

**Définition 4.3.4.** — On appelle *forme de Killing spéciale* une forme de Killing  $\omega$  telle que

$$\nabla_X d\omega = \lambda X^\flat \wedge \omega$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  c'est-à-dire  $\nabla d\omega = \lambda \widehat{\omega}$ .



En particulier  $d\omega$  est co-Killing. Alors

**Proposition 4.3.5.** — *Pour une variété de Gray, la forme de Kähler  $\omega$  est une forme de Killing spéciale.*

*Démonstration.* — On se sert de l'équation (3.61) : pour une variété de Gray,  $\psi = d\omega$  et la norme de  $\psi$  est 2 donc

$$\xi.\phi = -\frac{1}{6}\omega \wedge \omega$$

Maintenant  $\bar{\nabla}\psi = 0$  pour une variété NK implique

$$\nabla\psi = \xi.\psi$$

et

$$\xi_X.\psi = -\xi_{JX}\phi = -\iota_{JX}\left(\frac{1}{6}\omega \wedge \omega\right) = \frac{1}{3}X^\flat \wedge \omega$$

□

De plus, toujours par (3.61),

$$\nabla\phi = \xi.\phi \in \Lambda^4$$

donc  $\phi$  est une forme de Killing.

**Définition 4.3.6.** — *Soit  $G$  un groupe de Lie. On appelle variété à holonomie faible  $G$  une variété riemannienne  $(M, g)$  de dimension  $m$  admettant une forme de Killing spéciale soit deux formes  $\omega \in \Lambda^p$  et  $\psi \in \Lambda^{p+1}$  non nulles définissant une réduction de  $SO(M)$  à  $G$  – i.e.  $G$  est l'intersection des stabilisateurs en chaque point dans  $SO(m)$  de  $\omega, \psi$  – et vérifiant*

$$(4.15a) \quad \psi = (p+1)\nabla\omega$$

$$(4.15b) \quad \nabla\psi = \mu\hat{\omega}$$

Selon cette définition, une variété de Gray est une variété à holonomie faible  $SU(3)$  mais aussi :

### Exemples

– les variétés à *holonomie faible*  $G_2$  (« nearly-parallel  $G_2$  », en anglais). Le groupe  $G_2$  est le stabilisateur d'une 3-forme de  $\mathbb{R}^7$ . Par conséquent par 1.1.6, une variété de dimension 7 admet une réduction à  $G_2$  si et seulement si elle est munie d'une 3-forme globale  $\rho$ , d'un type algébrique déterminé (voir par exemple [11] ou [48], chapitre 110). Comme  $G_2 \subset SO(7)$ , cela définit en même temps une métrique  $g$ . On note  $*$  le dual de Hodge défini

par  $g$  et  $\nabla$  la connexion de Levi-Civita de  $g$ . La torsion intrinsèque peut être identifiée à  $\nabla\rho$ . Les variétés « presque parallèles »  $G_2$  sont définies par  $\nabla\rho$  totalement antisymétrique, i.e.  $\rho$  est de Killing et on peut montrer que c'est en fait une forme de Killing spéciale, avec  $d\rho = \lambda * \rho$ . Par conséquent elles sont à holonomie faible  $G_2$  (NB : le groupe  $G_2$  préserve aussi  $*\rho$ ).

– Suivant la définition habituelle, une variété de Sasaki est une variété riemannienne  $(M, g)$  munie d'une structure de contact  $(\varphi, X, \eta)$  telle que

(i)  $X$  est un vecteur de Killing

(ii)  $\forall Y, Z \in TM, (\nabla_Y \varphi)Z = g(Y, Z)X - \eta(Z)Y$

Maintenant, par définition de la structure de contact,  $\eta = X^\flat$  donc (i) équivaut à :  $\eta$  est une 1-forme de Killing et  $d\eta(Y, Z) = 2g(Y, \varphi(Z))$  donc (ii) équivaut à

$$\forall Y \in TM, \quad \nabla_Y d\eta = -2Y^\flat \wedge \eta$$

Finalement une formulation équivalente à (i) et (ii) est que  $\eta$  est une 1-forme de Killing spéciale, par conséquent les variétés de Sasaki de dimension  $2n + 1$  sont des variétés à holonomie faible  $U(n)$ , suivant notre définition (en effet, une structure de contact n'est autre qu'une réduction de  $SO(M)$  à  $U(n)$ , en dimension impaire).

On peut affaiblir la condition d'holonomie ou d'holonomie faible :

**Définition 4.3.7.** — On appelle variété critique forte une variété riemannienne  $(M, g)$  munie d'une  $p$ -forme  $\rho$  non nulle telle que

$$(4.16a) \quad d\rho = 0$$

$$(4.16b) \quad d*\rho = 0$$

où  $*$  désigne l'opérateur de Hodge de la métrique  $g$ .

**Définition 4.3.8.** — On appelle variété critique faible une variété riemannienne munie de deux formes  $\omega \in \Lambda^p$  et  $\psi \in \Lambda^{p+1}$  non nulles telles que

$$(4.17a) \quad \psi = d\omega$$

$$(4.17b) \quad d*\psi = \mu *\omega$$

avec  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Alors,

**Proposition 4.3.9.** — *Soit  $M$  une variété riemannienne munie d'une  $p$ -forme  $\rho$  non nulle. Si l'holonomie de  $M$  est contenue dans  $G = \text{Stab}_{SO(m)}\rho$ , i.e. si  $\rho$  est parallèle pour la connexion de Levi-Civita, la variété est critique forte.*

*Démonstration.* — En effet, le dual de Hodge  $*$  commute à la connexion  $\nabla$ , car c'est une connexion métrique, par conséquent  $\nabla\rho = 0$  implique  $\nabla*\rho = 0$  d'où, en projetant sur  $\Lambda^{m-p+1}$ ,  $d*\rho = 0$  mais aussi bien sûr  $d\rho = 0$ .  $\square$

Réciproquement, (4.16) implique  $\nabla\rho = 0$  pour certains groupes  $G$ . Ainsi pour  $G_2$ , on sait qu'il suffit pour que la 3-forme  $\rho$  soit parallèle qu'elle soit fermée et co-fermée (voir [21]) et pour  $\text{Spin}(7)$  on a même  $\nabla\Phi = 0$  équivaut à  $d\Phi = 0$  (et de plus  $*\Phi = \Phi$ , pour la métrique induite par l'inclusion  $\text{Spin}(7) \subset SO(8)$ ).

### Exemples

– Par la proposition 4.3.9, les variétés telles que leur groupe d'holonomie préserve une forme extérieure, comme les variétés à holonomie contenue dans  $G_2$ ,  $\text{Spin}(7)$ , etc., sont des variétés critiques fortes. Mais ce ne sont pas les seules.

– Les variétés symplectiques  $(M, \omega)$  sont des variétés critiques fortes. Soit  $g$  une métrique telle que  $(M, g, \omega)$  est une variété presque hermitienne ( $\omega$  est la forme de Kähler), la forme volume s'écrit  $\text{vol} = \frac{1}{n!}\omega^n$  et  $*\omega = \frac{1}{(n-1)!}\omega^{n-1}$ , où  $2n$  est la dimension de la variété. Alors  $d\omega = 0$  implique  $d*\omega = \frac{1}{(n-2)!}d\omega \wedge \omega^{n-2} = 0$ .

– Soit  $(M, g, J, \psi)$  une variété  $SU(3)$ . On a  $\phi = *\psi$  par (3.35). Alors, si  $\psi$  vérifie les équations (4.16),  $d\psi = d\phi = 0$ , la structure presque complexe  $J$  est intégrable. En effet, par le corollaire 3.3.13,  $N_1 = N_2 = 0$  donc le tenseur de Nijenhuis est nul.

De même,

**Proposition 4.3.10.** — *Une variété à holonomie faible  $G$ , où*

$$G = \text{Stab}_{SO(m)}\omega \cap \text{Stab}_{SO(m)}\psi$$

*est critique faible.*

*Démonstration.* — En effet (4.15a) implique  $d\omega = \psi$  c'est-à-dire (4.17a) et (4.15b) implique

$$\delta\psi = k(m - p + 1)\omega$$

c'est-à-dire (4.17b) car la co-différentielle est l'application adjointe de la différentielle extérieure pour le dual de Hodge :

$$\delta\psi = (-1)^{mp+1} * d * \psi$$

□

Réciproquement (4.17) est équivalente à (4.15) sous la condition que  $\omega$  et  $\psi$  sont des formes twisteurs. En effet (4.17a) implique que  $\psi$  est fermée et (4.17b) implique que  $\omega$  est co-fermée par conséquent, si ce sont des formes twisteurs, elles sont respectivement Killing et co-Killing.

L'holonomie faible et l'holonomie réduite d'une part, les variétés critiques faibles et critiques fortes d'autre part, sont liées via la construction du cône riemannien. Pour les premières c'est une découverte de Bär [4], qui cherchait à classifier les variétés admettant un spineur de Killing réel, reprise dans le langage des formes de Killing par Semmelmann [49]. Pour les secondes, c'est implicite par exemple dans le travail de Hitchin [36].

**Définition 4.3.11.** — Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne de dimension  $m$ . Le cône riemannien au dessus de  $M$  est la variété  $\widehat{M} = M \times \mathbb{R}^+$ , munie de la métrique

$$\widehat{g} = r^2 g + dr^2$$

dans les coordonnées  $(x, r)$ .

Soit  $\partial_r$  le vecteur radial tel que  $dr(\partial_r) = 1$ .

**Lemme 4.3.12.** — La connexion de Levi-Civita  $\widehat{\nabla}$  et le dual de Hodge  $\widehat{*}$  sur le cône  $\widehat{M}$ , relativement à  $\widehat{g}$ , sont donnés par les formules :

– soient  $X, Y \in TM$ , vus comme champs de vecteurs sur  $\widehat{M}$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_{\partial_r} \partial_r &= 0 \\ \widehat{\nabla}_X \partial_r &= \widehat{\nabla}_X \partial_r = \frac{1}{r} X \\ \widehat{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y - rg(X, Y) \partial_r \end{aligned} \tag{4.18}$$

– pour une  $p$ -forme  $\omega$  sur  $M$  vue comme  $p$ -forme sur  $\widehat{M}$ ,

$$(4.19a) \quad \widehat{\nabla}_{\partial_r} dr = 0, \quad \widehat{\nabla}_X dr = rX^\flat$$

$$(4.19b) \quad \widehat{\nabla}_{\partial_r} \omega = -\frac{p}{r} \omega$$

$$(4.19c) \quad \widehat{\nabla}_X \omega = \nabla_X \omega - \frac{1}{r} dr \wedge \iota_X \omega$$

– enfin

$$(4.20) \quad \widehat{*} \omega = r^{m-2p} * \omega \wedge dr$$

Les premières formules sont issues de [25]. La dernière a fait l'objet d'un lemme dans [49].

Sur le cône, les formes différentielles parallèles dans la direction radiale peuvent être factorisées en utilisant des formes différentielles sur la base :

**Lemme 4.3.13.** — Soit  $\rho$  une  $(p+1)$ -forme,  $p \in \mathbb{N}$ , sur le cône  $\widehat{M}$  d'une variété  $M$ ,  $\widehat{\nabla}_{\partial_r} \rho = 0$  si et seulement si il existe deux formes  $\omega \in \Lambda^p$  et  $\psi \in \Lambda^{p+1}$  sur  $M$  telles que

$$(4.21) \quad \rho = r^p dr \wedge \omega + \frac{r^{p+1}}{p+1} \psi$$

*Démonstration.* — D'abord, on peut toujours factoriser  $\rho$  en

$$\rho = dr \wedge \widetilde{\omega} + \widetilde{\psi}$$

où  $\widetilde{\omega}$ ,  $\widetilde{\psi}$  sont des formes horizontales, i.e.  $\iota_{\partial_r} \widetilde{\omega} = \iota_{\partial_r} \widetilde{\psi} = 0$ . Par (4.19a),  $\rho$  est parallèle dans la direction de  $\partial_r$  si et seulement si  $\widetilde{\omega}$ ,  $\widetilde{\psi}$  le sont or pour des formes horizontales cela requiert qu'on puisse les écrire suivant leur degré,

$$\widetilde{\omega} = r^p \omega \quad \text{et} \quad \widetilde{\psi} = r^{p+1} \psi$$

où  $\omega$ ,  $\psi$  sont des formes différentielles sur la base. C'est une conséquence directe de (4.19a), (4.19b).  $\square$

Puis, pour que  $\rho$  soit parallèle dans les autres directions, horizontales, les formes  $\omega$  et  $\psi$  sur la base doivent satisfaire certaines relations :

**Proposition 4.3.14.** — Soit  $M$  une variété riemannienne. Il existe une  $(p+1)$ -forme  $\rho$  sur  $\widehat{M}$ , parallèle si et seulement si il existe  $\omega$ ,  $\psi$  vérifiant (4.15) sur la base telles que  $\rho$  s'écrit (4.21). Autrement dit le cône riemannien est à holonomie réduite contenue dans  $G' = \text{Stab}_{SO(m)} \rho$  si et seulement si la variété  $M$  est à holonomie faible  $G$ , où  $G = \text{Stab}_{SO(m)} \omega \cap \text{Stab}_{SO(m)} \psi$ .

*Démonstration.* — Si  $\rho$  est parallèle, elle l'est en particulier dans la direction radiale donc elle peut s'écrire (4.21). Réciproquement, si on a  $\omega, \psi$ , on construit une  $(p+1)$ -forme sur le cône par (4.21).

Soit  $X \in TM$ . Par (4.19c),

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_X \rho = 0 & \iff r^{p+1} X^\flat \wedge \omega + r^p dr \wedge \nabla_X \omega + \frac{r^{p+1}}{p+1} \nabla_X \psi - \frac{r^p}{p+1} dr \wedge \iota_X \psi = 0 \\ & \iff r^p dr \wedge (\nabla_X \omega - \frac{1}{p+1} \iota_X \psi) + r^{p+1} (X^\flat \wedge \omega + \frac{1}{p+1} \nabla_X \psi) \\ & \iff \iota_X \psi = (p+1) \nabla_X \omega \quad \text{et} \quad \nabla_X \psi = -(p+1) X^\flat \wedge \omega \end{aligned}$$

□

**Corollaire 4.3.15.** — *Une variété riemannienne de dimension 6 admet une structure SNK (i.e. est une variété de Gray) si et seulement si son cône riemannien est à holonomie contenue dans  $G_2$ .*

Grâce à la proposition 4.3.14 on peut classifier toutes les variétés à holonomie faible à partir de la classification par Berger [8] des groupes d'holonomie riemannienne des variétés irréductibles (voir [4] puis [49].) En effet, le cône  $\widehat{M}$  est ou bien irréductible ou plat.

Quant aux équations définissant les variétés critiques faibles (4.17), elles correspondent à une  $(p+1)$ -forme  $\rho$  sur le cône, fermée et co-fermée :

**Proposition 4.3.16.** — *La  $(p+1)$ -forme  $\rho$  définie sur le cône par (4.21) vérifie (4.16) si et seulement si  $\omega, \psi$  vérifient (4.17) sur la base. Par conséquent le cône riemannien  $\widehat{M}$  d'une variété critique faible est une variété critique forte.*

*Démonstration.* — D'abord,

$$\begin{aligned} d\rho = 0 & \iff -r^p dr \wedge d\omega + r^p dr \wedge \psi + \frac{r^{p+1}}{p+1} d\psi = 0 \\ & \iff \psi = d\omega \quad \text{et} \quad d\psi = 0 \end{aligned}$$

la première équation à la dernière ligne impliquant évidemment la seconde. Puis par (4.20),

$$\begin{aligned} \widehat{*}\rho &= r^p \iota_{\partial_r} \widehat{*}\omega + \frac{r^{p+1}}{p+1} \widehat{*}\psi \\ &= (-1)^p r^{m-p} * \omega + \frac{r^{m-p-1}}{p+1} * \psi \wedge dr \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
d * \rho = 0 & \iff (-1)^p \frac{r^{m-p-1}}{m-p} dr \wedge * \omega + (-1)^p r^{m-p} d * \omega + \frac{r^{m-p-1}}{p+1} d * \psi \wedge dr = 0 \\
& \iff r^{m-p-1} dr \wedge \left( \frac{1}{m-p} * \omega + (-1)^m \frac{1}{p+1} d * \psi \right) + r^{m-p} d * \omega \\
& \iff d * \psi = \mu * \omega \quad \text{et} \quad d * \omega = 0
\end{aligned}$$

où  $\mu = (-1)^{m+1} \frac{p+1}{m-p}$ . □

**Remarque :** Par là, on a une autre preuve de 4.1.8, à peu près celle de Hitchin dans [36]. En effet, on reconnaît dans le système différentiel (4.3) trouvé par Reyes Carrión [47] les équations d'une variété critique faible (4.17). Par conséquent, par la proposition 4.3.16, si une variété  $SU(3)$  les vérifie, pour la forme de Kähler  $\omega$  et la 3-forme  $\psi$ , la 3-forme  $\rho$  définie sur le cône par (4.21) et induisant une réduction à  $G_2$  de  $\widehat{M}$  est fermée et co-fermée. Or on a vu que cela équivaut, par un résultat de Gray, Fernandez [21] à ce que  $\rho$  soit parallèle pour la connexion de Levi-Civita, c'est-à-dire encore à ce que l'holonomie de  $\widehat{M}$  soit réduite, contenue dans  $G_2$ . Alors, par le corollaire 4.3.15, en retour,  $M$  est une variété de Gray.

De la même façon, on peut déduire de ce que  $\nabla \Phi = 0$  est équivalent, pour une variété  $Spin(7)$ , à  $d\Phi = 0$  et  $\Phi = *\Phi$ , que l'équation

$$d\rho = \lambda * \rho$$

définit une variété à holonomie faible  $G_2$ , comme l'ont montré différemment, directement, Friedrich, Kath, Moroianu et Semmelmann [24].

Le travail de Hitchin [36] autour de ce que nous appelons variétés critiques, consiste alors en deux choses. Premièrement, remarquer qu'on peut se passer de la métrique, autrement dit qu'on peut inverser l'ordre et voir  $g$  comme déterminée par la forme différentielle  $\rho$  ou les formes  $\omega$  et  $\psi$  à condition de les prendre d'un certain type algébrique. Alors  $*\rho$  (ou  $*\omega$ ,  $*\psi$ ) ne dépend que de  $\rho$  – elle est en fait obtenue à travers une fonctionnelle dépendant de  $\rho$  – et les équations (4.16) ou (4.17) ne font plus intervenir la métrique. Deuxièmement, ayant observé que pour certains groupes les équations (4.16) ou (4.17) d'une variété critique faible ou forte, faisant intervenir uniquement les différentielles des formes, sont en fait équivalentes à celles définissant l'holonomie (faible ou forte) et qui utilisent la dérivée covariante  $\nabla$ , montrer qu'on peut obtenir les premières comme points critiques (ce qui justifie qu'on leur donne ce nom) des mêmes fonctionnelles naturelles sur les formes différentielles.

Ce qui permet en premier lieu de poser le problème variationnel est la définition choisie par Hitchin d'une *forme stable*.

**Définition 4.3.17.** — Soit  $\rho$  une  $p$ -forme sur  $\mathbb{R}^m$ . Elle est dite *stable* si son orbite sous  $GL(m, \mathbb{R})$  est ouverte dans  $\Lambda^p(\mathbb{R}^m)^*$ .

Par extension, on appellera *stable* une forme différentielle sur une variété  $M$ , stable en tout point de  $M$ .

**Remarque :** Si  $GL(m, \mathbb{R})$  a une orbite ouverte dans  $\Lambda^p(\mathbb{R}^m)^*$ , alors il en a une aussi dans le dual  $\Lambda^p \mathbb{R}^m$ . Or, moyennant le choix d'une  $m$ -forme non nulle,  $\Lambda^p \mathbb{R}^m \simeq \Lambda^{m-p}(\mathbb{R}^m)^*$  par conséquent s'il existe des  $p$ -formes stables en dimension  $m$ , il existe aussi des  $(m-p)$ -formes stables.

## Exemples

Hitchin a recensé tous les exemples de formes stables, caractérisées par leur stabilisateur. Ce sont :

- Toutes les 1-formes non nulles, quel que soit  $m$ .
- Les 2-formes de rang  $2n$  en dimension impaire  $m = 2n + 1$  ainsi, par la remarque précédente, que les  $(2n - 1)$ -formes.
- Les 2-formes non dégénérées en dimension paire  $m = 2n$  (et les  $(m - 2)$ -formes). Leur stabilisateur est le groupe symplectique  $Sp(m, \mathbb{R})$ .
- Les 3-formes en dimension 6 étudiées dans [35], de stabilisateur isomorphe à  $SL(3, \mathbb{C})$  ou  $SL(3, \mathbb{R}) \times SL(3, \mathbb{R})$ . Le premier cas nous intéresse particulièrement. En effet c'est de ce type qu'est la 3-forme  $\psi$  associée à une structure  $SU(3)$ .
- Les 3 ou 4-formes en dimension 7, de stabilisateur  $G_2$ .
- Les 3-formes, ou les 5-formes, en dimension 8, de stabilisateur isomorphe à  $SU(3)$ ,  $SU(2, 1)$  ou  $SL(3, \mathbb{C})$  agissant par leur représentation adjointe.

On remarque que le stabilisateur de ces formes, sauf pour les deux premiers exemples, préserve une forme volume. Par conséquent on a une application  $GL(m, \mathbb{R})$ -invariante définie sur un ouvert (l'orbite) :

$$\text{vol} : \Lambda^p(\mathbb{R}^m)^* \rightarrow \Lambda^m(\mathbb{R}^m)^*$$



On peut s'intéresser aux variations de vol :  $D\text{vol} \in \Lambda^p \mathbb{R}^m \otimes \Lambda^m(\mathbb{R}^m)^*$ . Or le produit extérieur induit un isomorphisme

$$(4.22) \quad A : \Lambda^p \mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} \Lambda^{m-p}(\mathbb{R}^m)^* \otimes \Lambda^m \mathbb{R}^m$$

(cette fois cela ne dépend du choix d'aucune forme volume). Alors,

**Lemme et définition 4.3.18.** — *Quelle que soit la  $p$ -forme stable  $\rho$  sur  $\mathbb{R}^m$ , il existe une unique  $(m-p)$ -forme notée  $\bullet\rho$  telle que  $D\text{vol}(\dot{\rho}) = \bullet\rho \wedge \dot{\rho}$ .*

Par  $GL(m, \mathbb{R})$ -invariance,

$$(4.23) \quad \text{vol}(\lambda^p \rho) = \lambda^m \text{vol}(\rho)$$

alors par la formule d'Euler,

$$(4.24) \quad \bullet\rho \wedge \rho = \frac{m}{p} \text{vol}(\rho)$$

### Exemples

On explicite à la fois  $\text{vol}(\rho)$  et  $\bullet\rho$  grâce à (4.24).

– Pour une 2-forme non dégénérée  $\omega$  en dimension paire  $m = 2n$ ,  $\text{vol}(\omega)$  est la forme volume symplectique :  $\frac{1}{n!} \omega^n$  (le produit extérieur de  $n$ -copies de  $\omega$ ) et la  $(m-2)$ -forme associée est

$$\bullet\omega = \frac{1}{(n-1)!} \omega^{n-1}$$

comme on vérifie aisément en différentiant  $\text{vol}$ .

– Pour les 3-formes en dimension 7,  $G_2 \subset SO(7)$  donc  $\rho$  détermine une métrique et une forme volume (pour plus de détails, voir [11] ou [36]). On prend cette dernière pour  $\text{vol}(\rho)$  et alors  $\bullet\rho = *\rho$  pour le dual de Hodge correspondant.

– C'est peut-être le cas qui nous intéresse le plus, celui des 3-formes  $\psi$  en dimension 6, le plus difficile. En reprenant la présentation (et les notations) de Hitchin [35], on commence par définir une application

$$K_\psi : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6 \otimes \Lambda^6(\mathbb{R}^6)^*$$

associée à  $\psi$  via l'isomorphisme (4.22) (pour  $p = 5$  et  $m = 6$ ) en posant

$$(4.25) \quad K_\psi(X) = A(\iota_X \psi \wedge \psi)$$

Puis on définit la quantité

$$z(\psi) = \frac{1}{6} \text{tr} K_\psi^2 \in (\Lambda^6(\mathbb{R}^6)^*)^2$$

Alors, d'après Hitchin [35], ou bien  $z(\psi) = 0$  et la forme n'est pas stable ou on peut regarder son signe. On entend par là qu'un élément  $u \in (\Lambda^6(\mathbb{R}^6)^*)^2$  est positif ( $u > 0$ ) si on peut l'écrire  $u = v \otimes v$  et négatif sinon ( $u < 0$ , alors il existe  $v$  telle que  $u = -v \otimes v$  car  $\Lambda^6(\mathbb{R}^6)^*$  est de dimension 1).

**Proposition 4.3.19 (Hitchin).** — *Une 3-forme  $\psi$  en dimension 6 est stable si et seulement si  $z(\psi) \neq 0$ . De plus suivant le signe de ce dernier, on est dans un des deux cas suivants :*

(i)  $z(\psi) > 0$  si et seulement si  $\psi$  est la somme de deux formes réelles décomposables  $\alpha, \beta \in \Lambda^3(\mathbb{R}^6)^*$  telles que  $\alpha \wedge \beta \neq 0$ . Autrement dit il existe une base de  $(\mathbb{R}^6)^*$ ,  $(e^j)_{1 \leq j \leq 6}$  telle que

$$\psi = e^{123} + e^{456} = \alpha + \beta$$

Alors on pose

$$\begin{aligned} \bullet\psi &= e^{123} - e^{456} = \alpha - \beta \\ \text{vol}(\psi) &= \alpha \wedge \beta = e^{123456} = \frac{1}{2} \bullet\psi \wedge \psi \end{aligned}$$

(ii)  $z(\psi) < 0$  si et seulement si  $\psi$  est la partie réelle d'une 3-forme volume complexe décomposable c'est-à-dire si et seulement si il existe une base  $(e^j)_{1 \leq j \leq 6}$ , telle que

$$\Psi = \psi + i\phi = (e^1 + ie^2) \wedge (e^3 + ie^4) \wedge (e^5 + ie^6)$$

où

$$\begin{aligned} \phi &= \bullet\psi = \text{Im}\Psi \\ \text{vol}(\psi) &= 2e^{123456} = \frac{1}{2}\phi \wedge \psi \end{aligned}$$

Toutes les formes au (i) sont dans la même orbite de  $GL(6, \mathbb{R})$  : il suffit de prendre l'isomorphisme qui envoie la base  $(e^j)_{1 \leq j \leq 6}$ , utilisée pour exprimer la première forme, sur la base utilisée pour la seconde forme. De même toutes les formes dans le cas (ii). Par conséquent  $z > 0$ ,  $z < 0$  définissent deux orbites disjointes ouvertes de  $GL(6, \mathbb{R})$  car l'application  $z$  est continue.

De plus, dans les 2 cas, on déduit des expressions explicites données à la proposition 4.3.19 :

$$(4.26) \quad K_\psi^2 = z(\psi) \otimes Id$$

et

$$(4.27) \quad z(\psi) = \pm \text{vol}(\psi)^2$$

Le stabilisateur des formes décrites au (i) doit, soit préserver chaque forme  $\alpha$ ,  $\beta$ , ou bien envoyer l'une sur l'autre, par conséquent la composante connexe de l'identité de  $Stab_{GL(6,\mathbb{R})}\psi$  est isomorphe dans ce cas à  $SL(3,\mathbb{R}) \times SL(3,\mathbb{R})$ . Quant au stabilisateur des formes vérifiant (ii), il préserve la 3-forme volume complexe  $\Psi$  et est isomorphe à  $SL(3,\mathbb{C})$ . Ce dernier préserve aussi un endomorphisme de carré -1. En effet en posant

$$(4.28) \quad J = \frac{1}{v(\psi)} K_\psi$$

on a bien  $J^2 = -Id$ , par (4.26) et (4.27).

On ne prouve pas la proposition 4.3.19 en entier (il faut se rapporter à [35]). On se contente du lemme suivant :

**Lemme 4.3.20.** — *Soit  $\psi$  une 3-forme sur en dimension 6 telle que son stabilisateur en tout point est isomorphe à  $SL(3,\mathbb{C})$ . Il existe une unique structure complexe  $J$  (un endomorphisme de carré -1) sur  $\mathbb{R}^6$  telle que  $\psi$  est de type  $(3,0)+(0,3)$ , donnée par (4.28).*

En effet, quand on regarde, comme nous, des variétés  $SU(3)$ , on sait toujours d'avance qu'on se trouve dans le cas (ii).

*Démonstration.* — Supposons que la 3-forme  $\psi$  est de type  $(3,0)+(0,3)$  par rapport à une structure complexe  $J$ . Alors  $\psi$  est la partie réelle d'une 3-forme complexe de type  $(3,0)$ , nécessairement décomposable,

$$\Psi = z^1 \wedge z^2 \wedge z^3$$

Comme  $\psi \neq 0$ ,  $(z_1, z_2, z_3)$  est une base de  $\lambda^{1,0}$  c'est-à-dire, en notant  $z^1 = e^1 + ie^2$ , ainsi de suite, où les  $e^j$  sont des formes réelles,  $(e^j)_{1 \leq j \leq 6}$  est un co-repère de  $\mathbb{R}^6$  tel que si on note le repère dual  $(e_j)_{1 \leq j \leq 6}$  on a  $Je_{2i-1} = e_{2i}$  pour tout  $i = 1, 2, 3$ . Cela détermine  $J$ . Alors bien sûr

$$\psi = e^{135} - e^{146} - e^{236} - e^{245}$$

comme au chapitre 3, équation (3.37), et  $\text{vol}(\psi) = 2e^{123456}$  facilement.

Montrons que la structure complexe trouvée coïncide avec (4.28). Le stabilisateur de  $\psi$ ,  $SL(3,\mathbb{C})$  par hypothèse agit transitivement sur les vecteurs. Par conséquent il suffit de le vérifier pour  $e_1$ .

$$\iota_{e_1}\psi = e^{35} - e^{46}$$

puis

$$\iota_{e_1}\psi \wedge \psi = -2e^{13456} = A^{-1}(e_2 \otimes \text{vol}(\psi))$$

où  $A$  est donné par (4.22). □

Maintenant, dans chaque cas, on peut trouver une métrique  $g$  telle que pour le dual de Hodge associé on ait  $*\rho = \bullet\rho$ . Par conséquent on peut remplacer les équations (4.16) par (4.29)

$$d\rho = 0 = d\bullet\rho$$

De plus, on peut voir (4.29) comme la solution d'un problème variationnel. Soit  $M$  une variété topologique compacte, orientée. On définit le volume associé à une forme stable par

$$V(\rho) = \int_M \text{vol}(\rho)$$

Par 1.1.6, une  $p$ -forme différentielle stable  $\rho$  sur une variété peut être vue comme une  $G$ -structure, où le stabilisateur de  $\rho$  en tout point est isomorphe à  $G$ . De fait on a vu que l'espace des  $G$ -structures peut être identifié à l'espace des sections de  $GL(M, \mathbb{R}) \times_{GL(m, \mathbb{R})} \mathcal{O}$ , où  $\mathcal{O}$  est l'orbite ouverte dans  $\Lambda^p(\mathbb{R}^m)^*$  formée des formes stables dont le stabilisateur est un sous-groupe conjugué de  $G$ . Alors,

**Proposition 4.3.21.** — *Une  $G$ -variété critique  $(M, \rho)$  est un point critique de  $V(\rho)$  où  $\rho$  varie dans une classe de cohomologie fixée de  $M$ .*

*Démonstration.* — On ne peut parler de classe de cohomologie que si, au point où on se trouve, on demande déjà que  $d\rho = 0$ . Alors montrons que  $d\bullet\rho = 0$  aussi.

$$DV(\dot{\rho}) = \int_M D\text{vol}(\dot{\rho}) = \int_M \bullet\rho \wedge \dot{\rho}$$

par (4.3.18). Si on ne s'autorise que des variations dans la classe de cohomologie, il existe  $\alpha \in \Lambda^p$  telle que  $\dot{\rho} = d\alpha$ . Par le théorème de Stokes, sur une variété sans bord,

$$DV(d\alpha) = (-1)^{p+1} \int_M d\bullet\rho \wedge \alpha$$

est nul quel que soit  $\alpha$  si et seulement si

$$d\bullet\rho = 0$$

□

Cependant, un tel point critique ne peut exister dans la classe triviale. On ne peut avoir à la fois que  $\rho = d\alpha$  est exacte et  $d\bullet\rho = 0$ , sinon le volume serait nul :

$$V(\rho) = \int_M \bullet\rho \wedge d\alpha = \int_M d\bullet\rho \wedge \alpha = 0.$$

En revanche, en partant de deux formes différentielles stables  $\omega, \psi$  telles que  $\omega$  et  $\bullet\psi$  sont exactes, les variétés critiques faibles peuvent être obtenues comme solution d'un

problème variationnel plus compliqué. Pour que cela soit intéressant cependant il faut que  $\omega, \psi$  soient telles que l'intersection de leur stabilisateur est isomorphe à un groupe  $G$  fixe, c'est-à-dire qu'elles définissent une  $G$ -structure sur la variété  $M$ .

On est intéressé nous au cas d'une 2-forme et d'une 3-forme différentielles sur une variété de dimension 6. Or, comme  $\psi$  détermine une structure presque complexe  $J$  sur la variété par 4.3.20 puis  $\omega, J$  déterminent la métrique

$$(4.30) \quad g(X, Y) = \omega(X, JY)$$

pour une variété presque hermitienne,  $\omega$  et  $\psi$  sont en principe suffisantes pour définir une variété  $SU(3)$ . Toutefois pour cela ait effectivement lieu, elles doivent vérifier certaines conditions. D'abord  $\psi \in \Lambda^3$  doit être dans la bonne orbite en chaque point :

$$(r1) \quad z(\psi) < 0$$

Puis  $\omega$  doit être non dégénérée :

$$(r2) \quad \text{vol}(\omega) = \frac{1}{6} \omega \wedge \omega \wedge \omega \neq 0$$

Telle qu'on a définie  $J, \psi$  est automatiquement de type  $(3,0)+(0,3)$  par rapport à elle mais il faut aussi que  $\omega$  soit de type  $(1,1)$ . Cela équivaut à la première condition de compatibilité :

$$(c1) \quad \omega \wedge \psi = 0$$

Alors (4.30) définit une forme bilinéaire symétrique  $g$ . On demande qu'elle soit définie positive de façon à ce que la variété soit riemannienne :

$$(c2) \quad (X, Y) \mapsto g(X, Y) = \omega(X, JY) > 0.$$

Enfin la dernière condition est que  $\psi$  soit de norme 1 pour  $g$ , ce qui dans le langage des formes s'écrit

$$(c3) \quad \text{vol}(\psi) = 2\text{vol}(\omega).$$

Finalement 2 formes  $\omega \in \Lambda^2$  et  $\psi \in \Lambda^3$  en dimension 6 qui vérifient (r1) et (r2), respectivement et (c1), (c2), (c3) définissent une structure  $SU(3)$ . Par rapport à la métrique  $g$ ,  $\bullet\psi = \phi = *\psi$  et  $\bullet\omega = \frac{1}{2}\omega \wedge \omega = *\omega$  et les équations

$$\begin{aligned} \psi &= d\omega \\ d\bullet\psi &= \mu\bullet\omega \end{aligned}$$

définissent une variété de Gray.



## CHAPITRE 5

# CLASSIFICATION DES VARIÉTÉS NK HOMOGÈNES

Le contenu du chapitre qui suit reproduit à peu près l'article [13]. On a seulement changé quelques notations et supprimés des passages dans les préliminaires qui se trouvent maintenant développés au chapitre 1, section 3 (section sur les espaces homogènes) et au chapitre 3 pour ce qui concerne les variétés presque hermitiennes. On a même gardé l'introduction, qui contient les deux théorèmes principaux 5.1.1 et 5.1.2, prouvés dans le corps du texte. De plus, on a ajouté une section, la section 2. On y trouvera une synthèse, avec plus de précisions que dans l'article, des principaux résultats de Gray sur les espaces 3-symétriques contenus dans [30] – dont l'énoncé de la conjecture 5.2.16 résolue dans ce chapitre – et surtout une présentation plus avantageuse de ces résultats utilisant la connexion et la torsion intrinsèque.

### 5.1. Introduction

Une variété approximativement kählérienne (ou Nearly Kähler, en anglais : dorénavant on note NK) est une variété presque hermitienne telle que la dérivée covariante pour la connexion de Levi-Civita de la forme de Kähler  $\omega$  est antisymétrique.

Les variétés strictement approximativement kählériennes (SNK) – c'est à dire qui ne sont pas simplement kählériennes – en dimension 6 sont particulières à plusieurs titres. Notamment elles admettent un spineur de Killing (voir [32]) et sont d'Einstein ([29]). Depuis les travaux de Nagy dans [42] on sait que de leur classification dépend beaucoup celle des variétés NK en toute dimension.

Une voie privilégiée de construction des variétés NK est celle des espaces 3-symétriques. A. Gray a montré en 1972 que tout espace homogène 3-symétrique naturellement réductif

est muni canoniquement d'une structure NK (voir [30]). Auparavant A. Gray et J.A. Wolf avaient conjecturé en 1968 dans [53] que tout espace homogène SNK est 3-symétrique. Retournant à l'intérêt manifesté dans les années 70 pour ces variétés, P.A. Nagy ([43]) a décomposé les variétés SNK de dimension quelconque en produits riemanniens d'espaces de twisteurs au-dessus de variétés Kähler-quaternioniques, d'espaces homogènes et de variétés SNK de dimension 6. Si la variété est de plus homogène, il ne reste que des espaces homogènes, de divers types mais tous 3-symétriques et des variétés SNK homogènes de dimension 6 de telle sorte qu'il suffit pour que la conjecture soit vraie qu'elle le soit en dimension 6.

Dans cet article on prouve la conjecture en classifiant totalement les variétés SNK homogènes simplement connexes de dimension 6.

***Théorème 5.1.1.*** — *Tous les espaces homogènes strictement NK de dimension 6 sont des espaces 3-symétriques munis de leur structure presque complexe canonique.*

Plus précisément on a

***Théorème 5.1.2.*** — *Les seuls espaces homogènes strictement NK simplement connexes de dimension 6 sont isomorphes à  $G/H$  où  $G$  et  $H$  sont les groupes de Lie donnés dans la liste :*

- $G = S^3 \times S^3$  et  $H = \{1\}$
- $G = G_2$  et  $H$  est  $SU(3)$  (dans ce cas  $G/H$  est la sphère de dimension 6) ou un de ses sous-groupes finis
- $G = Sp(2)$  et  $H = S^1 \times SU(2)$  (alors  $G/H$  est l'espace projectif complexe  $\mathbb{CP}(3)$ ) ou un de ses sous-groupes finis
- $G = SU(3)$ ,  $H = S^1 \times S^1$  et  $G/H$  est l'espace de drapeaux  $F(1, 2)$

*De plus sur chacun de ces espaces homogènes il y a une seule structure presque complexe NK invariante à une homothétie près.*

Pour achever la classification il faudra examiner les quotients finis des espaces homogènes dont la liste est dans le théorème 5.1.2. En effet les variétés SNK sont compactes, de groupe fondamental fini d'après Nagy ([42]). En dimension 6 cela résultait déjà de la démonstration par Gray dans [29] qu'elles sont d'Einstein, à courbure scalaire strictement positive.

Dans la section 3, des préliminaires algébriques à la classification permettent d'établir une première liste des groupes  $G$  et  $H$  tels que leur quotient  $G/H$  est susceptible d'admettre une structure SNK invariante. Dans la section 4, on traite le cas jugé le plus difficile du produit de sphères  $S^3 \times S^3$ . En résolvant l'équation différentielle de Reyes Carrión [47],



qui caractérise les variétés SNK en dimension 6, sur l'espace des 2-formes invariantes, on montre que  $S^3 \times S^3$  admet une seule structure homogène SNK correspondant à la construction de Ledger et Obata dans [40] d'un espace 3-symétrique. Dans la section 5 on traite plusieurs cas qui se ramènent au précédent. Dans la section 6 et la section 7, le moyen de déterminer les structures presque hermitiennes invariantes de  $F(1, 2)$  et  $\mathbb{C}P(3)$  est de décomposer la représentation linéaire isotropique en représentations irréductibles. Cette recherche apparaît liée à la théorie des espaces de twisteurs des variétés de dimension 4 (ici  $\mathbb{C}P(2)$  et  $S^4$  respectivement.) Il faut alors calculer quelles métriques sur ceux-ci sont NK. Enfin dans la section 8, la donnée d'une structure NK de la sphère  $S^6$  est rappelée être équivalente à la donnée d'une 3-forme générique constante sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^7$  et cela termine notre étude.

## 5.2. Espaces 3-symétriques

Dans cette section on omet le détail de certaines preuves, pour lesquelles on peut se reporter à l'article fondateur de Gray [29].

Les espaces 3-symétriques sont une généralisation des espaces symétriques. Ceux-ci sont définis comme des espaces homogènes  $G/H$  où  $G$  est muni d'une involution – un automorphisme d'ordre 2 – dont  $H$  est l'ensemble des points fixes. De même,

**Définition 5.2.1.** — *Un espace 3-symétrique est un espace homogène  $G/H$  où  $G$  est muni d'un automorphisme  $s$  d'ordre 3,  $s^3 = Id$  tel que*

$$G_0^s \subset H \subset G^s$$

où  $G^s = \{g \in G \mid s(g) = g\}$  est l'ensemble des points fixes de  $s$  et  $G_0^s$  est la composante connexe de l'identité de  $G^s$ .

Soit  $s_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  la différentielle de  $s$  à l'origine,  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^s$  est le sous-espace propre de  $s_*$  pour la valeur propre 1. Puisque  $s_*^3 = Id$ , les autres valeurs propres sont  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $j^2 = \bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Lemme 5.2.2.** — *Un espace 3-symétrique est un espace homogène réductif.*

*Démonstration.* — On étend  $s_*$  à  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  par  $\mathbb{C}$ -linéarité. Alors soient  $\mathfrak{m}_j, \mathfrak{m}_{j^2}$  les sous-espaces propres de  $S$  pour les valeurs propres  $j, j^2$ , respectivement.

$$(5.1) \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{m}_j \oplus \mathfrak{m}_{j^2}$$

On pose  $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}_j \oplus \mathfrak{m}_{j^2}) \cap \mathfrak{g}$  de telle sorte que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{m}$  est  $Ad(H)$ -invariant car  $s$  est un automorphisme.  $\square$

NB : pour un espace symétrique, un supplémentaire  $\mathfrak{m}$ ,  $Ad(H)$ -invariant est défini de façon similaire comme le sous-espace propre pour la valeur propre -1 de la différentielle de l'automorphisme en  $e$ .

Dans la suite on fait l'hypothèse supplémentaire suivante :  $\mathfrak{m}$  est muni d'un produit scalaire  $Ad(H)$ -invariant  $g$  (représentant une métrique invariante sur  $M$  par rapport à laquelle  $G$  est un sous-groupe du groupe d'isométries, cf chapitre 1, section 3) tel que

$$(5.2) \quad \forall u, v \in \mathfrak{m}, \quad g(s_*u, s_*v) = g(u, v)$$

c'est-à-dire  $s_*$  est orthogonal. Dans ce cas, on dit que  $M = G/H$  est un espace 3-symétrique *riemannien* (ou parfois encore un espace 3-symétrique tout court).

En passant au quotient, on définit un difféomorphisme de  $M$  :

$$s_o(\pi(g)) = \pi(s(g))$$

Il est bien défini (il ne dépend pas du représentant choisi) car  $\forall h \in H, s(h) = h$  ( $H \subset G^s$ ) donc  $\pi(s(gh)) = \pi(s(g)h) = \pi(s(g))$ .

**Lemme 5.2.3.** — *Le point  $o$  est un point fixe isolé de  $s_o$ .*

*Démonstration.* — Soit  $g \in G$  tel que  $x = \pi(g)$  est un point fixe de  $s_o$  :

$$\pi(s(g)) = s_o(\pi(g)) = \pi(g)$$

Par conséquent il existe  $h \in H$  tel que  $g = s(g)h$ . Puis  $g = s^3(g)h^3 = gh^3$  d'où  $h^3 = e$ . Or les racines cubiques de l'identité de  $G$  sont en nombre fini (inférieur à 3). Si on est proche de  $o$ , on peut choisir  $g$  assez proche de  $e$  pour que  $h = e$  et  $g \in G_0^s$ . Alors  $g \in H$  et  $x = o$ .  $\square$

En conjuguant par l'action (transitive) du groupe on obtient des difféomorphismes  $s_x$  attachés à chaque point  $x = \pi(g)$  de  $M$  :

$$s_x = g \circ s_o \circ g^{-1}$$

Cela suggère la définition

**Définition 5.2.4.** — *On appelle famille de difféomorphismes locaux cubiques de  $M$ , une famille de difféomorphismes  $(f_x)_{x \in M}$  variant avec  $x$  de façon différentiable, tels que*  
*(i)  $f_x$  est défini localement sur un voisinage de  $x$ .*

- (ii)  $x$  est un point fixe isolé de  $f_x$ .  
(ii)  $f_x^3 = Id$

Pour un espace 3-symétrique, la famille  $(s_x)_{x \in M}$  est bien sûr une famille de difféomorphismes locaux cubiques. Réciproquement on va voir qu'une telle famille définit un espace 3-symétrique, sous certaines conditions.

Mais d'abord, quel est le lien entre les espaces 3-symétriques et les variétés presque hermitiennes ?

Soit  $(f_x)_{x \in M}$  une famille de difféomorphismes locaux cubiques de  $M$ . On pose  $F_x = Df_x(x) : T_x M \rightarrow T_x M$ . Par analogie avec l'écriture des racines cubiques de l'identité dans  $\mathbb{C}$  on définit  $J_x$  par

$$(5.3) \quad F_x = -\frac{1}{2}Id|_{T_x M} + \frac{\sqrt{3}}{2}J_x$$

**Lemme 5.2.5.** — *L'endomorphisme  $J : TM \rightarrow TM$  défini par (5.3) est une structure presque complexe sur  $M$ .*

*Démonstration.* — On a  $F_x^2 + F_x + Id = \frac{3}{4}(J_x^2 + Id)$ . Or  $0 = F_x^3 - Id = (F_x - Id)(F_x^2 + F_x + Id)$  et par (ii) de la définition 5.2.4, 1 n'est pas une valeur propre de  $F_x$  donc  $F_x - Id$  est inversible. Finalement  $F_x^2 + F_x + Id = 0$  d'où  $J_x^2 = -Id$  quel que soit  $x \in M$ .  $\square$

**Définition 5.2.6.** — *La structure presque complexe définie par (5.3) est appelée structure presque complexe canonique associée à la famille  $(f_x)_{x \in M}$ . La structure presque complexe canonique d'un espace 3-symétrique est la structure presque complexe canonique associée à la famille de difféomorphismes cubiques locaux dite canonique  $(s_x)_{x \in M}$ .*

Réciproquement si on a une structure presque complexe  $J$ , il existe une famille de difféomorphismes locaux cubiques dont elle la structure presque complexe canonique. On définit  $(f_x)_{x \in M}$  par (5.3). Alors on peut trouver un voisinage  $U_x$  de  $x$  et un difféomorphisme  $f_x$  défini sur  $U_x$  tel que  $Df_x(x) = F_x$  et  $f_x$  vérifie les conditions de la définition 5.2.4.

Bien sûr le champs d'endomorphismes de  $TM$ ,  $F$  préserve (i.e. commute à)  $J$  et si  $(M, g, J)$  est presque hermitienne, il préserve aussi  $g$  :

$$\forall X, Y \in TM, \quad g(FX, FY) = g(X, Y)$$

On peut maintenant donner une autre définition des espaces 3-symétriques :

**Définition 5.2.7.** — *Un espace localement 3-symétrique riemannien est une variété riemannienne  $M$  munie d'une famille de difféomorphismes locaux cubiques  $(s_x)_{x \in M}$  telle que quel que soit  $x \in M$ ,  $s_x$  est une isométrie holomorphe, relativement à  $g$  et la structure presque complexe canonique  $J$ .*

**Proposition et définition 5.2.8.** — *Un espace 3-symétrique riemannien est un espace localement 3-symétrique riemannien connexe dont les isométries holomorphes cubiques  $s_x$  sont définies globalement.*

*Démonstration.* — Soit  $G$  le plus grand groupe connexe d'isométries holomorphes. Il agit transitivement sur  $M$  : on rappelle brièvement la preuve de Gray.

Il s'agit de montrer que pour tout  $x \in M$  l'orbite de  $x$  sous  $G$  est ouverte. Alors le complémentaire de  $G.x$  aussi est ouvert, comme réunion d'orbites  $G.y$ ,  $y \notin G.x$ . Par conséquent  $G.x$  est ouvert et fermé et puisque  $M$  est connexe, l'orbite de  $x$  est la variété entière.

Pour cela on définit  $\varphi : M \rightarrow M$  par  $\varphi(y) = s_y(x)$ . Comme  $y \mapsto s_y$  est différentiable par définition d'une famille de difféomorphismes locaux cubiques,  $\varphi$  l'est aussi et on peut calculer que  $D\varphi(x) = Id|_{T_x M} - S_x$ . Comme tout à l'heure,  $x$  est un point fixe isolé de  $s_x$  donc  $D\varphi(x)$  est inversible. Il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que  $\varphi$  est un difféomorphisme sur  $U$ . Maintenant  $\forall y \in \varphi(U)$ , il existe  $z \in U$  tel que  $y = s_z(x)$ . Or  $s_z$  est une isométrie holomorphe par hypothèse et on peut choisir  $U$  pour que  $s_z \in G$ . Par conséquent  $y \in G.x$  et  $\varphi(U)$  est un voisinage de  $x$  dans l'orbite. C'est ce qu'on voulait démontrer.

On définit un automorphisme  $s$  de  $G$ . Soit  $x \in M$ ,

$$s(g) = s_x \circ g \circ s_x^{-1}$$

Bien sûr  $s(g)$  est encore une isométrie holomorphe et  $s^3(g) = s_x^3 \circ g \circ s_x^{-3} = g$ . Soit  $H$  le sous-groupe d'isotropie en  $x$ . Il reste à vérifier  $G_0^s \subset H \subset G^s$ .

Montrons  $H \subset G^s$ . Soit  $g \in G$ ,  $g \in G^s$  si et seulement si  $s_x \circ g = g \circ s_x$ . Alors  $s_x(gx) = gs_x(x) = gx$ . Le point  $x$  est un point fixe isolé de  $s_x$  donc si  $g$  est assez proche de  $e$ ,  $gx = x$ , c'est-à-dire  $g \in H$ .

Dans l'autre sens : soit  $h \in H$ , la différentielle en  $x$  de  $s(h)$  est

$$s(h)_* = S_x \circ h_* \circ S_x^{-1}$$

Or  $h$  est une isométrie holomorphe, donc  $h_*$  commute à  $J_x$ , et à  $S_x$  par (5.3) :  $s(h)_* = h_*$  d'où  $s(h) = h$  (deux isométries qui ont la même différentielle en un point coïncident partout) c'est-à-dire  $h \in G^s$ .

Finalement  $M \simeq G/H$  est un espace 3-symétrique au sens de la définition 5.2.1.  $\square$

En outre, classiquement :

**Proposition 5.2.9.** — *Un espace localement 3-symétrique riemannien connexe, simplement connexe est un espace 3-symétrique riemannien.*

Que les  $s_x$  soient des isométries holomorphes est une propriété globale qu'on peut cependant remplacer par des conditions algébriques c'est-à-dire des relations entre des tenseurs de  $M$ .

On part d'une variété presque hermitienne  $(M, g, J)$ . On définit  $S$  par (5.3). Soit  $x \in M$ . Par un théorème de Kobayashi-Nomizu [39], p259, si  $S_x$  préserve les dérivées successives de la courbure riemannienne au point  $x$ ,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad S(\nabla^p R) = \nabla^p R$$

il existe une isométrie locale  $s_x$  telle que  $Ds_x(x) = S_x$ . En fait Gray montre qu'il suffit que  $S$  préserve  $R$  et  $\nabla R$ . Puis l'isométrie  $s_x$  est holomorphe si et seulement si  $S_x$  préserve, outre  $J$ ,  $\nabla J$  et  $\nabla^2 J$ .

Or, compte-tenu de la relation (5.3), on peut exprimer ces conditions en utilisant  $J$  au lieu de  $S$ . Par exemple,

**Proposition 5.2.10.** — *Soit  $(M, g)$  une variété presque hermitienne. Le champs de tenseurs  $S$  préserve  $g$ ,  $J$ . Il préserve en outre  $\nabla J$  si et seulement si la variété est quasi-kählerienne.*

*Démonstration.* — Soit  $\alpha$  un tenseur 3-fois covariant,  $S$  préserve  $\alpha$  si et seulement si pour tous  $X, Y, Z \in TM$

$$(5.4) \quad \alpha(X, Y, Z) = \alpha(S^{-1}X, S^{-1}Y, S^{-1}Z) = \alpha(S^2X, S^2Y, S^2Z)$$

Or  $S^2 = -\frac{1}{2}Id + \frac{\sqrt{3}}{2}J$ . Des manipulations algébriques prouvent alors que (5.4) est équivalente à

$$(5.5) \quad \alpha(X, Y, Z) = -\alpha(JX, JY, Z) = -\alpha(X, JY, JZ) = -\alpha(JX, Y, JZ)$$

Appliqué à  $\nabla J$  ou  $\bar{\eta} = \frac{1}{2}J \circ \nabla J$  (on sait que  $S$  préserve  $J$ ) cela donne

$$\forall X, Y, \quad \bar{\eta}_X Y = -\bar{\eta}_{JX} JY$$

En effet on a déjà  $g(\bar{\eta}_X JY, JZ) = -g(J\bar{\eta}_X Y, JZ) = -g(\bar{\eta}_X Y, Z)$ . Autrement dit  $S$  préserve  $\nabla J$  si et seulement si la variété presque hermitienne  $(M, g, J)$  est de type  $W_1 \oplus W_2$ .  $\square$

Gray transforme de même la condition  $S\alpha = \alpha$  pour  $\alpha$  d'ordre 4 ou 5. En appliquant à  $R$ ,  $\nabla J$  et  $\nabla R$ , il obtient les conditions nécessaires et suffisantes :

**Theorème 5.2.11.** — *Soit  $(M, g, J)$  une variété presque hermitienne. Il existe une famille de difféomorphismes locaux cubiques  $(s_x)_{x \in M}$  dont  $J$  est la structure presque complexe canonique, telle que  $M$  est un espace localement 3-symétrique, si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées : quels que soient  $W, X, Y, Z, T \in TM$ ,*

$$(5.6a) \quad M \text{ est quasi-kählerienne : } (\nabla_X J)Y + (\nabla_{JX} J)JY = 0$$

$$(5.6b) \quad S \text{ préserve } \nabla^2 J$$

$$(5.6c) \quad R(X, Y, Z, T) = R(JX, JY, Z, T) + R(JX, Y, JZ, T) + R(JX, Y, Z, JT)$$

$$(5.6d) \quad (\nabla_W R)(X, Y, Z, T) + (\nabla_W R)(JX, JY, JZ, JT) = 0$$

Or nous voyons que le système d'équations (5.6) est équivalent à cet autre, exprimé en termes de la connexion intrinsèque de variété presque hermitienne :

$$(5.7a) \quad \bar{\eta}_X Y + \bar{\eta}_{JX} JY = 0$$

$$(5.7b) \quad \bar{\nabla} \bar{\eta} = 0$$

$$(5.7c) \quad \bar{\nabla} \bar{R} = 0$$

En effet, premièrement (5.6a) et (5.7a) sont clairement équivalentes, montrons que (5.7b), avec (5.6a) ou (5.7a), impliquent (5.6b).

Par (3.17),  $\nabla_X J = -2J\bar{\eta}_X$  d'où

$$\nabla^2 J = 2J(2\bar{\eta} \circ \bar{\eta} - \nabla \bar{\eta})$$

En outre  $\nabla \bar{\eta} = \bar{\nabla} \bar{\eta} + \bar{\eta} \cdot \bar{\eta}$  donc si  $\bar{\nabla} \bar{\eta} = 0$ ,  $\nabla^2 J$  dépend algébriquement de  $\bar{\eta}$  et il est par conséquent préservé par  $S$ , comme ce dernier.

Réciproquement, supposons que  $S$  préserve  $\nabla J$  et  $\nabla^2 J$  et montrons qu'il préserve  $\bar{\nabla} \bar{\eta}$ . La connexion  $\bar{\nabla}$  est hermitienne donc

$$(\bar{\nabla} \bar{\eta})_{X, JY} JZ + (\bar{\nabla} \bar{\eta})_{X, Y} Z = 0$$

On utilise les équations de Gray dans [29]. Pour un tenseur d'ordre 4, si  $S$  préserve  $\bar{\nabla}\bar{\eta}$  :

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}\bar{\eta}(X, Y, Z, T) &= \bar{\nabla}\bar{\eta}(JX, JY, Z, T) + \bar{\nabla}\bar{\eta}(JX, Y, JZ, T) + \bar{\nabla}\bar{\eta}(JX, Y, Z, JT) \\ &= 3\bar{\nabla}\bar{\eta}(JX, JY, Z, T)\end{aligned}$$

car  $\bar{\nabla}$  est hermitienne mais aussi, en remplaçant  $X$  par  $JX$  et  $Y$  par  $JY$

$$3\bar{\nabla}\bar{\eta}(X, Y, Z, T) = \bar{\nabla}\bar{\eta}(JX, JY, Z, T) = \frac{1}{3}\bar{\nabla}\bar{\eta}(X, Y, Z, T).$$

Finalement  $\bar{\nabla}\bar{\eta}(X, Y, Z, T) = 0$  quels que soient  $X, Y, Z, T$  c'est-à-dire  $S$  préserve  $\bar{\nabla}\bar{\eta}$ , avec  $\bar{\eta} \in W_1 \oplus W_2$ , si et seulement si  $\bar{\nabla}\bar{\eta} = 0$ .

D'autre part (5.7b) implique aussi (5.6c), par le travail de Falcitelli, Farinola et Salamon dans [20]. Avec leurs notations, (5.6c) s'écrit en effet

$$R \in \mathcal{L}_2 = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}_{-1} \oplus \mathcal{K}_{-2} \oplus \mathcal{C}_4$$

Or, pour une variété quasi-kählerienne (voir les tables page 271 de [20]), les composantes de la courbure dans le supplémentaire de  $\mathcal{L}_2$  sont données par  $\bar{\nabla}\bar{\eta}$  (et même seulement par  $\bar{\nabla}\zeta$ ).

Quant aux deux dernières équations (5.6d) et (5.7c),

$$\nabla R = \bar{\nabla}R + \bar{\eta}.R$$

puis, par le lemme 4.2.11, compte-tenu de (5.7b),

$$\nabla R = \bar{\nabla}\bar{R}_0 + \bar{\eta}.R$$

où  $\bar{R}_0 \in \mathcal{K}(\mathfrak{u}(n))$ .

L'équation (5.6c) implique

$$R(X, Y, Z, T) = R(JX, JY, JZ, JT)$$

Mais  $\bar{\eta}$  anticommute à  $J$  donc

$$(5.8) \quad (\bar{\eta}.R)_W(X, Y, Z, T) = -(\bar{\eta}.R)_W(JX, JY, JZ, JT)$$

De l'autre côté,  $\bar{R}_0$  est un tenseur de courbure kählerien donc il vérifie en particulier  $\bar{R}_0(X, Y, Z, T) = \bar{R}_0(JX, JY, JZ, JT)$  et puisque  $\bar{\nabla}$  est une connexion hermitienne,

$$(5.9) \quad \bar{\nabla}\bar{R}(X, Y, Z, T) = \bar{\nabla}\bar{R}(JX, JY, JZ, JT)$$

On en déduit que (5.6d) est équivalente à  $\bar{\nabla}\bar{R}_0 = 0$  ou  $\bar{\nabla}\bar{R} = 0$  sous les conditions (5.7b) et (5.6c).

Finalement on a démontré

**Théorème 5.2.12.** — *Une variété presque hermitienne  $M$  est un espace localement 3-symétrique si et seulement si elle est quasi-kählerienne et la torsion et la courbure de la connexion hermitienne canonique sont parallèles pour  $\bar{\nabla} : \bar{\nabla}\bar{\eta} = 0$  et  $\bar{\nabla}\bar{R} = 0$ .*

On souhaite donner une autre preuve, beaucoup plus directe, de ce résultat, sans passer par les équations de Gray. On commence par démontrer :

**Proposition 5.2.13.** — *Soit  $M = G/H$  un espace homogène presque hermitien, réductif. C'est un espace 3-symétrique si et seulement si la variété est quasi-kählerienne et la connexion normale coïncide avec la connexion hermitienne canonique.*

*Démonstration.* — Pour un espace homogène presque hermitien réductif,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{m}$  est muni d'un endomorphisme  $J$  de carré -1, correspondant à une structure presque complexe invariante de  $M$ . Cela induit une décomposition invariante

$$T^{\mathbb{C}}M = T^{1,0} \oplus T^{0,1}$$

ou

$$(5.10) \quad \mathfrak{m}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{m}^{1,0} \oplus \mathfrak{m}^{0,1}$$

Cette décomposition vérifie en outre, puisque  $\mathfrak{m}$  et  $J$  sont  $Ad(H)$ -invariants,

$$(5.11) \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}^{1,0}] \subset \mathfrak{m}^{1,0} \quad \text{et} \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}^{0,1}] \subset \mathfrak{m}^{0,1}$$

Bien sûr on a toujours  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ . Cela va nous servir à construire un automorphisme  $s$  de  $G$  par analogie avec (5.1). On construit une application linéaire  $f$  de  $\mathfrak{g}$  en posant

$$f|_{\mathfrak{h}} = Id|_{\mathfrak{h}}, \quad f|_{\mathfrak{m}^{1,0}} = jId|_{\mathfrak{m}^{1,0}} \quad \text{et} \quad f|_{\mathfrak{m}^{0,1}} = j^2Id|_{\mathfrak{m}^{0,1}}$$

Elle s'intègre en un automorphisme d'ordre 3 de  $G$  défini par

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \quad s(\exp(X)) = \exp(f(X))$$

(comme  $G$  est simplement connexe, l'exponentielle  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  est surjective) si et seulement si

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \quad [f(X), f(Y)] = f([X, Y])$$

Pour cela il suffit, à cause de ce qu'on a vu plus haut (5.11) que

$$(5.12) \quad [\mathfrak{m}^{1,0}, \mathfrak{m}^{1,0}] \subset \mathfrak{m}^{1,0}, \quad [\mathfrak{m}^{0,1}, \mathfrak{m}^{0,1}] \subset \mathfrak{m}^{0,1} \quad \text{et} \quad [\mathfrak{m}^{1,0}, \mathfrak{m}^{0,1}] \subset \mathfrak{h}$$

On peut comparer (5.12) à la condition (1.51) pour un espace symétrique. La torsion de la connexion normale  $\nabla^{\mathfrak{m}}$  est représentée par le tenseur constant  $T^{\mathfrak{m}}$  :

$$T^{\mathfrak{m}}(u, v) = -[u, v]^{\mathfrak{m}}$$



On peut donc réinterpréter (5.12) en

$$\begin{aligned} \forall u, v \in \mathfrak{m}^{1,0}, \quad T^{\mathfrak{m}}(u, v) &\in \mathfrak{m}^{0,1} \\ \forall u, v \in \mathfrak{m}^{0,1}, \quad T^{\mathfrak{m}}(u, v) &\in \mathfrak{m}^{1,0} \\ \forall u \in \mathfrak{m}^{1,0}, \forall v \in \mathfrak{m}^{0,1}, \quad T^{\mathfrak{m}}(u, v) &= 0 \end{aligned}$$

En voyant  $T^{\mathfrak{m}}$  comme un tenseur 3 fois covariant, cela signifie que  $T^{\mathfrak{m}}$  vit dans l'intersection de  $\Lambda^2 \otimes \Lambda^1$  avec  $\otimes^3(\mathfrak{m}^{1,0})^* \oplus \otimes^3(\mathfrak{m}^{0,1})^* : T^{\mathfrak{m}} \in \llbracket \lambda^{2,0} \otimes \lambda^{1,0} \rrbracket$  alors

$$\eta^{\mathfrak{m}} \in W_1 \oplus W_2 \subset \Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}^\perp(n)$$

On en déduit premièrement que  $\nabla^{\mathfrak{m}}$  est la connexion intrinsèque puis que la torsion intrinsèque est  $\eta^{\mathfrak{m}}$ , appartenant à  $W_1 \oplus W_2$ .

Finalement, (5.10) est la décomposition en sous-espaces propres d'un automorphisme  $s$  d'ordre 3 de  $G$  si et seulement si la connexion normale de  $G/H$  est la connexion intrinsèque et la variété est quasi-kählerienne.  $\square$

A partir de là, il est aisé de démontrer le théorème 5.2.12 :

*Démonstration.* — Soit  $M$  une variété presque hermitienne, vérifiant  $\overline{\nabla}\eta = 0$  et  $\overline{\nabla}\overline{R} = 0$ . Alors  $M$  est localement isomorphe à un espace homogène réductif presque hermitien  $G/H$  dont la connexion normale est la connexion hermitienne canonique par le travail de Tricerri (voir proposition 1.3.15). Si en outre la variété est quasi-kählerienne, par la proposition 5.2.13,  $M$  est un espace 3-symétrique.

Réciproquement, si  $M$  est un espace 3-symétrique, la décomposition (5.1) définit une structure presque complexe invariante qui n'est autre que la structure presque complexe canonique. De plus, par la proposition 5.2.13, la variété est quasi-kählerienne et la connexion normale est la connexion hermitienne canonique, donc  $\overline{\nabla}\eta = 0$  et  $\overline{\nabla}\overline{R} = 0$  par la proposition 1.3.11.  $\square$

Les conditions au théorème 5.2.12 peuvent être comparées à la définition d'un espace localement symétrique par  $\nabla R = 0$ . En effet on peut voir la connexion de Levi-Civita  $\nabla$  comme la connexion intrinsèque, de torsion nulle, de la structure métrique (la structure  $SO(m)$ ). On peut se demander quel espace homogène on obtient en généralisant ces conditions pour une  $G$ -structure quelconque.

Maintenant, à l'intérieur de la classe des variétés quasi-kähleriennes, il y a les variétés NK. Les variétés NK sont les variétés presque hermitiennes dont la torsion intrinsèque

est totalement antisymétrique. Or, par la proposition 5.2.13 la connexion intrinsèque d'un espace 3-symétrique est la connexion normale de l'espace homogène réductif.

**Définition 5.2.14.** — *On dit qu'un espace homogène riemannien est naturellement réductif s'il est réductif et*

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}, \quad g([X, Y], Z) = g(X, [Y, Z])$$

De façon équivalente, la torsion de la connexion normale est totalement antisymétrique.

C'est le cas en particulier si le produit scalaire  $g$ ,  $Ad(H)$ -invariant sur  $\mathfrak{m}$  est la restriction d'une métrique biinvariante de  $G$ .

Dès lors, puisque la connexion normale coïncide avec la connexion intrinsèque pour un espace 3-symétrique,

**Proposition 5.2.15.** — *Un espace 3-symétrique est NK si et seulement si il est naturellement réductif.*

Réciproquement on reformule géométriquement la conjecture de Gray et Wolf, énoncée dans [53] (à la fin, p113 ou dans l'introduction, p79) dans le langage de la théorie des groupes de Lie :

**Conjecture 5.2.16.** — *Tout espace homogène SNK est un espace 3-symétrique naturellement réductif muni de sa structure presque complexe canonique.*

Pour une variété NK, on a toujours  $\overline{\nabla}\eta = 0$ , par la proposition 4.2.2 par conséquent le théorème 5.2.12 devient, dans ce cas :

**Proposition 5.2.17.** — *Une variété NK telle que la courbure de la connexion hermitienne canonique est parallèle,  $\overline{\nabla}R = 0$ , est un espace 3-symétrique.*

P.A. Nagy [43] trouve dans Cleyton [17] une condition suffisante pour que cela arrive :

**Proposition 5.2.18.** — *Une variété SNK, de dimension strictement supérieure à 6 telle que la représentation du groupe d'holonomie de  $\overline{\nabla}$  sur l'espace tangent est irréductible est un espace 3-symétrique.*

Nous nous fondons sur les énoncés plus précis de l'article de Cleyton et Swann [18] :

**Theorème 5.2.19 (Cleyton et Swann).** — *Soit  $(M, g)$  une  $G$ -variété riemannienne irréductible. Si la torsion intrinsèque de  $M$  est non nulle, invariante, antisymétrique, alors ou bien  $(M, g)$  est une variété de Gray,  $G = SU(3)$  ou une variété à holonomie faible  $G_2$ , ou bien elle est localement isométrique à un espace homogène à isotropie irréductible. En particulier,  $(M, g)$  est d'Einstein.*

NB : Une  $G$ -variété irréductible est une variété munie d'une  $G$ -structure telle que la restriction à  $G$  de la représentation standard de  $GL(m, \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}^m$  (permettant de construire le fibré tangent à partir du fibré des repères) est irréductible.

Soit  $M$  une  $G'$ -variété telle que la torsion intrinsèque  $\bar{\eta}$  est parallèle pour  $\bar{\nabla}$ . Alors on a une réduction supplémentaire au stabilisateur  $G$  de  $\bar{\eta}$  pour lequel évidemment c'est un tenseur invariant. Puisque  $\bar{\nabla}\bar{\eta} = 0$ ,  $\bar{\nabla}$  est une  $G$ -connexion et la torsion intrinsèque de  $G(M)$  est toujours  $\bar{\eta}$  car  $G \subset G'$  implique  $\bar{\eta} \in \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}'^\perp \subset \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}^\perp$ . Par conséquent le théorème s'applique dans ce cas.

Les variétés SNK vérifient bien sûr  $\bar{\nabla}\bar{\eta} = 0$ . Les groupes  $G'$  et  $G$  sont respectivement  $U(3)$  et  $SU(3)$  en dimension 6 et en dimension quelconque supérieure à 8,  $G' = U(n)$  et  $G = \text{Stab}_{U(n)}\bar{\psi}$ . La proposition 5.2.18 est alors un corollaire du théorème 5.2.19.

La démonstration du théorème 5.2.19 (ou directement, de la proposition 5.2.18) se fonde, brièvement, sur les arguments suivants. M. Berger [8] a établi la liste des groupes d'holonomie  $G$  pouvant advenir pour une variété riemannienne irréductible en étudiant l'espace  $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$  défini plus haut des tenseurs de courbures algébriques à valeurs dans  $\mathfrak{g}$ . En effet on peut montrer

**Proposition 5.2.20 (Cleyton & Swann).** — *Soit  $V$  une représentation irréductible d'un groupe de Lie  $G$ . On est dans un des trois cas suivants :*

- (i)  $\mathcal{K}(\mathfrak{g}) = \{0\}$
- (ii)  $G$  est un groupe d'holonomie riemannienne de la liste de Berger et  $V$  est la représentation d'holonomie
- (iii)  $G = Sp(n)U(1)$  et  $V = \llbracket E \otimes L \rrbracket$  où  $E$ , resp.  $L$ , sont les représentations complexes standards de  $Sp(n)$  et  $U(1)$ .

NB : La preuve de Berger prescrit en même temps que le groupe d'holonomie sa représentation sur l'espace tangent. C'est d'elle qu'il s'agit au (ii).

Maintenant, si  $G$  préserve une 3-forme, on ne peut être dans le cas (iii), et dans le cas (ii), les deux seules possibilités sont  $SU(3)$  et  $G_2$  avec leur représentation standard en dimension 6 ou 7.

Pour une variété NK, on pose  $G$  égal comme précédemment au stabilisateur de  $\bar{\psi}$  dans  $U(n) : G \subsetneq U(n)$  si la 3-forme n'est pas identiquement nulle, i.e. la variété n'est pas kählerienne. Par conséquent en dimension supérieure à 8, si la représentation de  $G$  sur l'espace tangent est irréductible,  $G$  ne peut pas être  $SU(3)$  et on est dans le cas (i) de la proposition précédente :  $\mathcal{K}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ . Or par la proposition 4.2.11,  $\bar{\nabla} \bar{R} = \bar{\nabla} \bar{R}_0$  avec  $\bar{R}_0 \in \mathcal{K}(\mathfrak{g})$  d'où dans ce cas  $\bar{\nabla} \bar{R} = 0$ , c'est-à-dire que la variété est localement 3-symétrique.

### 5.3. Espaces homogènes presque hermitiens

**Définition 5.3.1.** — *Un espace homogène presque hermitien  $(M, g, J)$  est un espace homogène dont la métrique et la structure presque complexe sont invariantes pour l'action de  $G$  et en font une variété presque hermitienne.*

Si l'espace homogène est réductif, elles sont donc identifiées respectivement à un produit scalaire et un endomorphisme de carré  $-1$  de  $\mathfrak{m}$ ,  $Ad(H)$ -invariants, notés encore  $g$  et  $J$ .

Un espace 3-symétrique est bien sûr un espace homogène presque hermitien, la structure presque complexe étant donnée par

$$S_x = -\frac{1}{2}Id|_{T_x M} + \frac{\sqrt{3}}{2}J_x$$

Il est aussi réductif par le lemme 5.2.2.

La dérivée covariante  $\tilde{\nabla}$  d'une connexion n'est pas un tenseur, en revanche  $A$  défini par  $A_X = \mathcal{L}_X - \tilde{\nabla}_X$ , si. Il y a donc une correspondance bijective entre les connexions  $G$ -invariantes et les applications  $\Lambda : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$ , c'est à dire vérifiant

$$(5.13) \quad (\Lambda(X)Y|Z) + (\Lambda(X)Z|Y) = 0 \quad \text{pour tous } X, Y \in \mathfrak{m}$$

donnée par  $\Lambda(X) = (-A_X)_o$ , en identifiant  $\mathfrak{m}$  et  $T_o M$ . Il s'agit du théorème de Wang spécialisé aux espaces homogènes réductifs (théorème 2.1, p191 de [39]). Si  $\tilde{\nabla} = \nabla$ , la dérivée covariante de la connexion de Levi-Civita, qui est sans torsion, on a de plus

$$(5.14) \quad \Lambda(X)Y - \Lambda(Y)X = [X, Y]_{\mathfrak{m}} \quad \text{pour tous } X, Y \in \mathfrak{m}$$

La notation  $\mathfrak{m}$  en indice signifie la projection sur ce sous-espace du vecteur indicé. Les équations (5.13) et (5.14) définissent une unique application  $\Lambda$  donnée par la formule du théorème 3.3, p201 [39]

$$(5.15) \quad \Lambda(X)Y = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}} + U(X, Y)$$

où

$$(5.16) \quad 2(U(X, Y)|Z) = ([Z, Y]_{\mathfrak{m}}|X) + ([Z, X]_{\mathfrak{m}}|Y)$$

Désormais  $M = G/H$  désigne un espace homogène réductif simplement connexe de dimension 6. On cherche à quelles conditions il admet une structure presque hermitienne NK. Or

**Proposition 5.3.2.** — *Soit  $M = G/H$  un espace homogène riemannien de dimension 6, non isométrique à la sphère standard  $S^6$ . S'il admet une structure presque complexe NK, elle est unique et invariante pour l'action du groupe  $G$ .*

*Démonstration.* — L'exposé ci-dessous suit le livre [5], surtout les section 5.2 et 5.3.

En dimension 6, les variétés NK sont caractérisées par l'existence d'un spineur de Killing : si on note  $\Sigma M$  le fibré des spineurs complexes, il existe  $\sigma \in \Gamma(\Sigma M)$ ,  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tel que

$$\nabla_X \sigma = \beta X. \sigma$$

en notant encore  $\nabla$  la connexion induite sur  $\Gamma(\Sigma)$  par la connexion de Levi-Civita. Quant au point, il désigne la multiplication de Clifford. Comme on est en dimension paire on peut scinder  $\sigma$  en une partie négative  $\sigma^- \in \Sigma^- M$  et une partie positive  $\sigma^+ \in \Sigma^+ M$ , suivant la décomposition en sous-espaces irréductibles de la représentation de  $\text{Spin}(6)$ . Alors

$$\begin{aligned} \nabla_X \sigma^+ &= \beta X. \sigma^- \\ \nabla_X \sigma^- &= \beta X. \sigma^+ \end{aligned}$$

si bien que le conjugué de  $\sigma$ ,  $\bar{\sigma} = \sigma^+ - \sigma^-$  est encore un spineur de Killing :

$$\nabla_X \bar{\sigma} = -\beta X. \bar{\sigma}$$

De plus  $\beta$  et  $-\beta$  sont les seules valeurs possibles car il faut que la courbure scalaire vaille  $s = 4\beta^2 n(n-1)$ , où  $n = 6$  est la dimension de  $M$ . On définit alors la structure presque complexe  $J$  associée à  $\sigma$  par

$$(5.17) \quad JX. \sigma^+ \stackrel{\text{def}}{=} iX. \sigma^+$$

après avoir vérifié que l'ensemble  $\{X.\sigma_x^+ | X \in T_x M\}$  est un sous-espace complexe de  $\Sigma_x^+ M$  en tout point  $x \in M$ . A présent si  $M$  n'est pas la sphère  $S^6$ , l'ensemble des spineurs de Killing pour la valeur  $\beta$  est de dimension 1 ([5], proposition 1, p126) et la structure presque complexe associée  $J$  est NK. Inversement si on se donne une structure presque complexe NK  $J$  sur  $M$ , il existe un spineur de Killing tel qu'elle en soit la structure presque complexe associée (voir [32]). On en déduit qu'il y a une seule structure presque complexe NK sur  $M$ . De plus on peut définir une action du groupe d'isométrie sur les spineurs. Pour un espace homogène riemannien, les spineurs de Killing sont invariants et par conséquent  $J$  aussi, par (5.17).  $\square$

Ainsi, tout espace homogène riemannien de dimension 6 hormis la sphère  $S^6$ , muni d'une structure presque complexe NK est un espace homogène presque hermitien.

Dans l'examen de la conjecture 5.2.16 en dimension 6 on distingue deux types d'espaces homogènes. Les cas où  $G$  et  $H$  sont des groupes produits des sphères  $S^1$  et  $S^3$ . On veut démontrer qu'ils se ramènent tous au cas de  $S^3 \times S^3$  c'est à dire, comme on le verra à la section suivante, que la variété admet au plus une structure SNK homogène qui est de plus 3-symétrique comme on souhaite. Et les cas exceptionnels de l'espace des drapeaux  $F(1, 2)$ , de l'espace projectif  $\mathbb{C}P(3)$  et de la sphère  $S^6$  qu'on sait admettre eux aussi une telle structure et on voudrait démontrer en examinant la représentation linéaire isotropique de  $H$  qu'il n'y en n'a pas d'autre.

Une telle démarche est systématique :

**Proposition 5.3.3.** — *Soit  $G/H$  un espace homogène SNK de dimension 6. Le groupe  $H$  est contenu dans  $SU(3)$ .*

*Démonstration.* — D'abord  $M = G/H$  est un espace homogène presque hermitien,  $\mathfrak{m}$  est muni d'un endomorphisme de carré  $-1$  et on le voit comme un espace vectoriel complexe de dimension 3. Alors  $Ad(H) \subset U(\mathfrak{m})$ , le groupe des transformations unitaires de  $\mathfrak{m}$ , exprimant que la métrique et la structure presque complexe sont invariantes, ce qui s'écrit encore  $g^*\omega = \omega$ , où  $\omega$  est la forme de Kähler. Puis

$$g^*d\omega = d(g^*\omega) = d\omega$$

Or pour une variété SNK de dimension 6,  $d\omega$  est non nulle, de type  $(3, 0) + (0, 3)$ ,  $Ad(H)$  préserve aussi dans ce cas une 3-forme complexe sur  $\mathfrak{m}$  et doit finalement être contenu dans  $SU(\mathfrak{m})$ .  $\square$

Celui-ci étant compact, de dimension 8, les seuls groupes qui conviennent, hormis lui-même, sont  $U(1) = S^1$ ,  $SU(2) = Sp_1 = S^3$  et leurs produits directs et leurs quotients finis.

Pour un espace homogène on a la suite d'homotopie

$$(5.18) \quad \cdots \rightarrow \pi_2(G/H) \rightarrow \pi_1(H) \rightarrow \pi_1(G) \rightarrow \pi_1(G/H) \rightarrow H/H^0 \rightarrow 0$$

Cela implique que le rang du groupe fondamental de  $G$  doit être inférieur ou égal à celui du groupe fondamental de  $H$ . Et si on suppose  $G$  connexe,  $H$  l'est aussi.

A partir de ces considérations on peut établir une liste des groupes  $H$  possibles et la liste, en regard, des couples  $(G, H)$ , compatible avec ces faits. Il nous reviendra d'examiner cas par cas à partir de cette liste ce que l'existence de cette application surjective

$$(5.19) \quad \phi : \pi_1(H) \rightarrow \pi_1(G)$$

impose plus précisément au plongement de  $H$  dans  $G$ . Pour éviter de citer tous les quotients finis d'un groupe on écrit seulement la liste des algèbres de Lie :

**Lemme 5.3.4.** — *Soit  $G/H$  un espace homogène SNK simplement connexe de dimension 6 et soient  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  les algèbres de Lie de  $G$  et  $H$ , respectivement. Elles apparaissent à la même ligne du tableau ci-dessous :*

$\dim \mathfrak{h}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{g}$
0	$\{0\}$	$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$
1	$i\mathbb{R}$	$i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$
2	$i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ $i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$	$i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ $\mathfrak{su}(3)$
3	$\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$
4	$i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)$ $i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)$	$i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ $\mathfrak{sp}(2)$
8	$\mathfrak{su}(3)$	$\mathfrak{g}_2$

*Démonstration.* — Cette liste est établie, en commençant par  $\mathfrak{h}$  jusqu'à  $\mathfrak{su}(3)$  qui doit la contenir à cause de la proposition 5.3.3, à partir de la liste par ordre de dimension croissante des groupes simples, compacts, connexes :  $S^3 \simeq SU(2) \simeq Sp(1)$ ,  $SU(3)$ ,  $Spin(5) \simeq Sp(2)$ ,  $G_2$ , etc. Le dernier groupe cité est de dimension 14 car  $SU(3)$  est de dimension 8 et  $G/H$  est de dimension 6.

Outre les raisons de dimension qui peuvent l'empêcher, on se demande quelles algèbres de Lie  $\mathfrak{h}$  sont vraiment des sous-algèbres de  $\mathfrak{su}(3)$ . C'est bien sûr le cas de  $i\mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{su}(2)$  et  $i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ . C'est encore le cas de  $i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)$  via le plongement

$$\begin{aligned} i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) &\rightarrow \mathfrak{su}(3) \\ ix + A &\mapsto \begin{pmatrix} ix & 0 \\ 0 & A - ixI_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où  $A$  est une matrice  $2 \times 2$  antihermitienne à trace nulle. En revanche ce n'est plus le cas de  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ . En effet à partir d'une application  $\varphi : \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{su}(3)$ , non identiquement nulle, en restreignant à chaque facteur on obtient deux représentations complexes  $\rho_1, \rho_2$  de  $\mathfrak{su}(2)$  de dimension 3 qui commutent. Alors de deux choses l'une : ou bien une représentation est irréductible et la seconde est triviale, par le lemme de Schur. Ou bien il existe pour chacune un sous-espace de dimension 1 et un sous-espace de dimension 2 invariants, orthogonaux. Cette décomposition est la même pour  $\rho_1$  et  $\rho_2$  car elles commutent et les deux représentations sont nulles sur le premier espace car  $\mathfrak{su}(2)$  n'admet pas de représentation autre que triviale avant la dimension 2. Par conséquent  $\varphi$  est le prolongement par zéro d'une application  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{su}(2)$ . Dans ce cas, comme dans le précédent, elle ne saurait être un plongement. Enfin  $i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$  et toutes les algèbres qui la contiennent (en premier  $i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)$ ) ne peuvent pas être plongées dans  $\mathfrak{su}(3)$  car les sous-algèbres de Cartan de celle-ci sont de dimension 2.  $\square$

Si  $G$  n'est pas simplement connexe, soit  $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$  son revêtement universel et  $H'$  le sous-groupe de  $\tilde{G}$ ,  $\pi^{-1}(H)$ . Alors

**Lemme 5.3.5.** — *Les deux espaces homogènes  $M = G/H$  et  $M' = \tilde{G}/H'$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* — L'isomorphisme est donné par

$$\begin{aligned} M' &\rightarrow M \\ [g] &\mapsto [\pi(g)] \end{aligned}$$

qui est bien définie et injective car  $g$  et  $g'$  définissent la même classe,  $g'g^{-1} \in H'$ , si et seulement si  $\pi(g')\pi(g)^{-1} \in H$ , c'est à dire  $\pi(g), \pi(g')$  définissent la même classe de  $M$ . Elle est aussi surjective car  $\pi$  l'est.  $\square$

Si le groupe fondamental de  $G$  est fini,  $\tilde{G}$  et  $H'$  sont encore compactes, l'algèbre de Lie de  $H'$ ,  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$  est encore incluse dans  $\mathfrak{su}(3)$  et bien sûr l'algèbre de Lie de  $\tilde{G}$  est  $\mathfrak{g}$ . Dans



la suite on supposera donc que  $G$  est simplement connexe (sections 3, 5, 6, 7) ou que  $G$  et  $H$  sont des produits finis des groupes  $S^1$  et  $S^3$  ou des quotients finis de ces produits (section 4). Dans le premier cas, comme les groupes sont connexes, la représentation linéaire isotropique de  $M$ ,  $Ad(H)$ , est donnée par la représentation de l'algèbre de Lie,  $ad(\mathfrak{h})$ , sur le supplémentaire invariant choisi. On peut donc finalement se contenter de chercher les structures presque hermitiennes invariantes des espaces  $G/H$  où  $G$  et  $H$  sont les groupes simples, compacts, connexes, dont les algèbres de Lie apparaissent à une même ligne du tableau 5.3.4.

#### 5.4. Le groupe de Lie $S^3 \times S^3$

On se propose ici de chercher toutes les structures NK sur le groupe de Lie  $S^3 \times S^3$ , invariantes à gauche. On en connaît d'avance une, correspondant à la construction de Ledger et Obata (voir [40]).

Si  $G$  est un groupe de Lie compact,  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie,  $g$  une métrique biinvariante sur  $G$ , on appelle  $\Delta$  le sous-groupe diagonal, isomorphe à  $G$ , de  $G \times G \times G$ . L'espace homogène  $M = G \times G \times G / \Delta$  est isomorphe à  $G \times G$  et on choisit l'identification concrète

$$\begin{aligned} G \times G \times G / \Delta &\rightarrow G \times G \\ [x, y, 1] &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

où  $[x, y, 1]$  désigne la classe de  $(x, y, 1)$ . Toute classe contient un unique triplet de cette forme donc l'application est bien définie. On choisit alors pour supplémentaire  $Ad(H)$ -invariant de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  de  $\Delta$  dans  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ , le sous-espace vectoriel  $\mathfrak{m}$  formé des vecteurs à composante tangente au *premier* facteur nulle de telle sorte que la restriction de  $g \times g \times g$  à  $\mathfrak{m}$  donne une métrique sur  $M$  qui n'est pas la métrique produit de  $G \times G$  mais le rend naturellement réductif. Maintenant la permutation circulaire de  $G \times G \times G$  est un automorphisme d'ordre 3 qui induit une structure d'espace 3-symétrique sur  $M$  et, finalement, une structure NK.

Lorsque  $G = SU(2) \simeq S^3$ , si on joint deux bases orthonormées de  $\mathfrak{g}$  et qu'on prolonge par invariance à gauche, on obtient un repère sur  $M$  non orthonormé mais dans le co-repère associé  $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$  duquel la forme de Kähler s'écrit

$$(5.20) \quad \omega = \frac{\sqrt{3}}{2}(e_1 \wedge f_1 + e_2 \wedge f_2 + e_3 \wedge f_3)$$

Notre but est de démontrer que la structure SNK ainsi décrite sur  $S^3 \times S^3$  est la seule (bien sûr cela dépend de la métrique biinvariante choisie, mais comme  $SU(2)$  est simple elles sont toutes proportionnelles) :

**Proposition 5.4.1.** — *Soit  $(g, J)$  une structure presque hermitienne invariante de  $S^3 \times S^3$ . Si  $(S^3 \times S^3, g, J)$  est SNK, il est isomorphe, en tant qu'espace homogène presque hermitien, à la construction de Ledger et Obata. En particulier c'est un espace 3-symétrique.*

**Définition 5.4.2.** — *Étant donné un co-repère  $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$  de  $S^3 \times S^3$ , on appelle 2-forme canonique, la forme donnée en (5.20).*

Les variétés SNK de dimension 6 sont caractérisées par la vérification par la forme de Kähler d'une équation différentielle donnée par Reyes Carrión au théorème 4.9 page 48 de [47] (pour une présentation et une démonstration différentes du même fait voir aussi [35] ou le chapitre 4 de cette thèse.) On appelle  $\psi$  une 3-forme de type  $(3,0)+(0,3)$  proportionnelle à  $d\omega$  et  $\phi$  l'unique 3-forme telle que  $\psi + i\phi$  est une forme complexe de type  $(3,0)$ . On a

$$(5.21) \quad -2\lambda\omega \wedge \omega = d\phi$$

où  $\lambda$  est une constante réelle. Plus précisément

$$(5.22) \quad d\omega = 3\lambda\psi$$

Dès lors on cherche des 2-formes invariantes sur  $S^3 \times S^3$  vérifiant (5.21) ou encore des triplets  $(\omega, \psi, \lambda)$  vérifiant (5.21) et (5.22).

Pour faciliter les calculs on introduit un repère approprié dans lequel l'expression de la forme de Kähler est proche de celle de la 2-forme canonique.

Sur la sphère  $S^3$  il existe un repère global  $(X_1, X_2, X_3)$  privilégié, invariant à gauche et vérifiant

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= 2X_3 \\ [X_2, X_3] &= 2X_1 \\ [X_3, X_1] &= 2X_2 \end{aligned}$$

En prenant la base duale de l'espace cotangent en chaque point on obtient un repère des 1-formes  $(e_1, e_2, e_3)$  tel que

$$(5.23) \quad de_i = e_{i+1} \wedge e_{i+2}$$

en notant les indices dans  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . On remarque que n'importe quel co-repère obtenu à partir d'un tel repère par une isométrie directe a encore la propriété (5.23).

**Définition 5.4.3.** — On appelle *co-repère circulaire* un co-repère  $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$  de  $S^3 \times S^3$  tel que les trois premières (resp. les trois dernières) formes sont nulles en chaque point sur l'espace tangent du second (resp. du premier) facteur et vérifient (5.23).

C'est dans un tel co-repère que les calculs seront faits.

**Lemme 5.4.4.** — Dans un co-repère circulaire  $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ , la forme de Kähler d'une variété NK s'écrit comme combinaison linéaire de termes « mixtes »  $e_i \wedge f_j$   $i, j = 1, 2, 3$

*Démonstration.* — On écrit pour l'instant en toute généralité

$$\omega = \sum_{i=1}^3 a_i e_{i+1} \wedge e_{i+2} + \sum_{i=1}^3 b_i f_{i+1} \wedge f_{i+2} + \sum_{i,j=1}^3 c_{i,j} e_i \wedge f_j$$

Que les coefficients soient des constantes, non des fonctions sur la variété, traduit l'invariance de  $\omega$ . Puis, en exprimant seulement que la forme est non dégénérée, soit  $\omega \wedge \omega \wedge \omega \neq 0$ , on obtient d'abord

$${}^tACB + \det C \neq 0$$

où  $A$  est le vecteur colonne des  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $B$  le vecteur colonne des  $b_i$  et  $C$  la matrice des  $c_{i,j}$ . Mais pour une variété NK,  $d\omega$  est une 3-forme de type  $(3, 0) + (0, 3)$ . Comme  $\omega$  est elle-même de type  $(1, 1)$ , on doit avoir

$$(5.24) \quad \omega \wedge d\omega = 0$$

c'est à dire que  $\omega \wedge \omega$  est fermée. En fait elle est même exacte par (5.21). Cela conduit à

$${}^tCA = 0 \quad \text{et} \quad CB = 0$$

puis à

$${}^tACB = 0$$

Finalement  $\det C \neq 0$ , c'est à dire  $C$  et  ${}^tC$  sont inversibles et il faut  $A = B = 0$ .  $\square$

Remarquons que l'énoncé est toujours valide si on remplace « NK » par « quasi-kählerienne ».

On peut même mieux choisir sa base pour que  $C$  soit diagonale :

**Lemme 5.4.5.** — *Il existe un co-repère circulaire  $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$  tel que*

$$(5.25) \quad \omega = \lambda_1 e_1 \wedge f_1 + \lambda_2 e_2 \wedge f_2 + \lambda_3 e_3 \wedge f_3$$

*où les  $\lambda_i$   $i = 1, 2, 3$  sont des constantes réelles non nulles.*

*Démonstration.* — Soient  $M, N$  deux matrices de  $SO(3)$ . Partant d'un co-repère circulaire  $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$  on lui associe le co-repère obtenu en appliquant sur chaque espace tangent aux 3 premières formes la matrice de changement de base  $M$  et aux 3 dernières la matrice  $N$ . Comme remarqué précédemment, c'est encore un co-repère circulaire (cela revient à appliquer sur chaque facteur du produit une isométrie directe de la métrique biinvariante de  $SU(2)$ .) Alors si  $\omega$  s'écrivait dans l'ancien co-repère grâce à la matrice  $C$ , son expression dans le nouveau fait intervenir la matrice  $MC^tN$ . En écrivant  $C$  comme produit d'une matrice symétrique (donc diagonalisable par un changement de base ortho-normée) et d'une matrice orthogonale on voit qu'on peut choisir  $M$  et  $N$  telles qu'elle soit diagonale.  $\square$

A partir seulement de la forme de Kähler d'une variété SNK, on peut retrouver la structure presque complexe, puis la métrique. En effet, par le lemme 4.3.20 et (c3),  $\psi$  est de type  $(3,0) + (0,3)$  par rapport à  $J$  si et seulement si il existe une constante positive  $c$  telle que

$$(5.26) \quad \iota_X \psi \wedge \psi = c \iota_X \text{vol}$$

où  $\text{vol}$  désigne la forme volume de  $g$ .

Cette expression intrinsèque de  $J$  permet de le calculer dans n'importe quel repère : soit  $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$  le repère associé à un co-repère circulaire  $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$  dans lequel la forme de Kähler s'écrit (5.25). Rappelons la définition (4.25) de  $K_\psi : TM \rightarrow TM \otimes \Lambda^6$ . En différentiant l'expression (5.25) de  $\omega$  grâce aux formules (5.23), on trouve

$$(5.27) \quad K_{d\omega}(X_1) = ((\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2)X_1 - 2\lambda_2\lambda_3Y_1) \otimes s$$

où  $s = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge f_1 \wedge f_2 \wedge f_3$ . Pour calculer la constante  $c$  on se sert du fait que  $J^2 = -Id$ . En appliquant  $K_{d\omega}$  une nouvelle fois à la partie vectorielle de l'expression (5.27) ci-dessus, on trouve

$$c = \frac{1}{3\lambda} \sqrt{-\lambda_1^4 - \lambda_2^4 - \lambda_3^4 + 2\lambda_1^2\lambda_2^2 + 2\lambda_2^2\lambda_3^2 + 2\lambda_1^2\lambda_3^2}$$

Dans cette base,  $J$  admet donc la matrice

$$\begin{pmatrix} D & E \\ -E & -D \end{pmatrix}$$

avec

$$D = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \end{pmatrix}$$

et

$$E = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -2\lambda_2\lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda_3\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}$$

On progresse : il est maintenant possible de calculer  $\phi$  sans passer par la métrique, ce qui va nous permettre de résoudre l'équation différentielle (5.21). Quels que soient les champs de vecteurs  $X, Y, Z$  sur  $M$  on a

$$\phi(X, Y, Z) = \psi(JX, JY, JZ) = -\psi(X, Y, JZ)$$

**Lemme 5.4.6.** — Soit  $(S^3 \times S^3, \omega, J)$  une variété NK et soit  $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$  un co-repère circulaire dans lequel  $\omega$  s'écrit (5.25). Alors (5.21) est équivalente à

$$(5.28) \quad k \frac{1}{\lambda_i} = \lambda_i (\lambda_i^2 - \lambda_{i+1}^2 - \lambda_{i+2}^2) \quad \forall i = 1, 2, 3$$

avec

$$(5.29) \quad k = \frac{6\lambda^2 \det C}{c}$$

*Démonstration.* — Soit  $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$  un co-repère circulaire dans lequel  $\omega$  s'écrit, comme démontré au lemme 5.4.4,  $\sum c_{i,j} e_i \wedge f_j$  et tel que  $J$  est représenté dans le repère associé par la matrice

$$\begin{pmatrix} D & E \\ F & G \end{pmatrix}$$

On a

$$3\lambda \phi(e_{i+1}, e_{i+2}, f_j) = -(C^t G)_{i,j}$$

$$3\lambda \phi(e_i, f_{j+1}, f_{j+2}) = (DC)_{i,j}$$

puis

$$3\lambda d\hat{\rho} = \sum_{i,j=1}^3 (-C^t G + DC)_{i,j} e_{i+1} \wedge e_{i+2} \wedge f_{j+1} \wedge f_{j+2}$$

Quant au calcul de  $\omega \wedge \omega$  il fait apparaître les mineurs d'ordre 2 de  $C$ , c'est à dire son inverse. L'équation caractéristique (5.21) s'écrit alors

$$2k'^t C^{-1} = -C^t G + DC$$

avec

$$(5.30) \quad k' = 6\lambda^2 \det C$$

Ce n'est rien d'autre que (5.28), en tenant compte de nos simplifications successives.  $\square$

On résoud facilement (5.28). Premièrement notons que si tous les  $\lambda_i$  sont égaux ou seulement de signes différents les trois équations sont vérifiées à la fois pour  $k = \lambda_1^4 = \lambda_2^4 = \lambda_3^4$ . Autrement si on note  $S = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$  les  $\lambda_i^2$  doivent d'abord tous vérifier la même équation du second ordre

$$2x^2 - Sx - k = 0$$

Puis supposons que  $\lambda_1^2$  et  $\lambda_2^2$  soient deux racines distinctes et, par exemple,  $\lambda_3^2 = \lambda_2^2$ . Alors  $\lambda_1^2 \lambda_2^2$  vaut le produit des racines :  $-\frac{k}{2}$  et l'équation (5.28),  $i = 2$  implique  $k = 0$ , ce qui signifierait que  $\omega$  est dégénérée. Par conséquent toutes les valeurs diagonales sont égales au signe près.

Il reste à trancher cette ambiguïté. On le fait en introduisant pour la première fois la métrique et en demandant qu'elle soit positive.

D'abord, remarquons que le cas où les trois signes sont positifs est identique au cas où un signe sur trois seulement l'est. En effet on obtient l'un à partir de l'autre en changeant  $e_1$  en  $-e_1$  et  $e_2$  en  $-e_2$  (en supposant que  $\lambda_1, \lambda_2$  sont négatifs) c'est-à-dire en effectuant une rotation d'angle  $\pi$  autour de  $e_3$  dans le premier facteur. De même les deux cas restant.

Effectivement, si on étudie la forme quadratique  $X \mapsto \omega(JX, X)$ , on voit qu'elle est soit définie positive si le déterminant de  $C$  est positif, ou définie négative dans le cas contraire.

**Proposition 5.4.7.** — *Soit  $\omega$  une 2-forme différentielle sur  $S^3 \times S^3$  vérifiant l'équation différentielle (5.21). Il existe un co-repère circulaire tel que  $\omega$  est un multiple de la 2-forme canonique. Il est strictement positif si et seulement si  $\omega$  représente une variété riemannienne NK.*

*Démonstration.* — Pour tout  $i$  dans  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$$\omega(Je_i, e_1) = -\frac{2}{c} \lambda_{i+1} \lambda_{i+2} \omega(f_1, e_1) = \frac{2}{c} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

$$\omega(Je_i, f_i) = \frac{1}{c} \lambda_i (\lambda_i^2 - \lambda_{i+1}^2 - \lambda_{i+2}^2)$$

La forme quadratique  $X \mapsto \omega(JX, X)$  est la somme de trois formes quadratiques de degré 2,

$$q_i = \frac{2\lambda_i}{c} (\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}x_i^2 - (\lambda_i^2 - \lambda_{i+1}^2 - \lambda_{i+2}^2)x_iy_i + \lambda_{i+1}\lambda_{i+2}y_i^2), \quad i = 1, 2, 3$$

dont le discriminant est  $c^2$ , positif, et les coefficients des termes carrés ont le signe de  $\det C$ .  $\square$

Ceci achève en même temps la preuve de la proposition 5.4.1.

### 5.5. Espaces homogènes quotients de groupes produits des sphères

Soit  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  un couple d'algèbres de Lie dans la liste du lemme 5.3.4. On cherche les plongements possibles de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$  à conjugaison près. En travaillant avec les algèbres de Lie on écarte provisoirement la question des quotients finis des groupes. Cependant si  $G$  est de la forme  $(S^1)^p \times G'/\Gamma$  et  $H = (S^1)^q \times H'/\Sigma$  où  $\Gamma$  et  $\Sigma$  sont des groupes finis et  $G'$  et  $H'$  sont simplement connexes, on retient que la surjectivité de  $\phi$  vue en (5.19) implique premièrement  $p \leq q$ , deuxièmement que le morphisme de groupe obtenu en restreignant au facteur  $(S^1)^p$  de  $H$  et en projetant dans  $G$  sur le facteur  $(S^1)^q$  est lui-même surjectif. Au niveau des algèbres de Lie cela se traduit, en notant  $p$  la projection sur  $\bigoplus i\mathbb{R}$ , parallèlement à  $\bigoplus \mathfrak{su}(2)$ , par

$$(5.31) \quad \mathfrak{h} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{g} \xrightarrow{p} \bigoplus i\mathbb{R} \quad \text{est surjectif}$$

Dans cette section on s'intéresse aux espaces homogènes  $G/H$  où  $G$  et  $H$  sont des produits directs de  $S^1$  et  $S^3$  ou des quotients finis de ces produits. Par conséquent  $\mathfrak{h}$  doit être  $i\mathbb{R}$ ,  $i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{su}(2)$  ou  $i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)$  et d'après le lemme 5.3.4 on a toujours  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ . Cependant on ignore encore si  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$  apparaissant dans cette décomposition est  $Ad(H)$ -invariant.

**Proposition 5.5.1.** — *Soit  $M = G/H$  un espace homogène NK simplement connexe de dimension 6 avec  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  sommes directes d'algèbres de Lie isomorphes à  $i\mathbb{R}$  ou  $\mathfrak{su}(2)$ . Alors  $\mathfrak{h}$  admet pour supplémentaire dans  $\mathfrak{g}$  un idéal  $\mathfrak{m}$  isomorphe à  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$  et  $M$  est isomorphe à  $S^3 \times S^3$  muni de son unique structure NK 3-symétrique invariante.*

*Démonstration.* — Un idéal est bien sûr en particulier  $ad(\mathfrak{h})$ -invariant et même  $Ad(H)$ -invariant puisque  $H$  est connexe. Considérons chaque cas :

$$- \mathfrak{g} = i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{h} = i\mathbb{R}$$

D'après (5.31),  $\varphi \circ p$  est surjectif, c'est à dire dans ce cas bijectif. L'intersection du plongement  $\varphi$  avec le noyau de la projection  $p$  est donc  $\varphi(\mathfrak{h}) \cap (\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)) = \{0\}$  et ce dernier est par conséquent toujours un supplémentaire de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$ , quel que soit précisément le plongement.

$$- \mathfrak{g} = i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{h} = i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$$

De même ici  $\mathfrak{m} = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$  convient.

$$- \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{h} = \mathfrak{su}(2)$$

En projetant sur chaque facteur  $\mathfrak{su}(2)$  de  $\mathfrak{g}$  on obtient un endomorphisme d'algèbre de Lie de  $\mathfrak{su}(2)$ , soit une représentation unitaire de dimension 2 de  $\mathfrak{su}(2)$ . Or  $\mathfrak{su}(2)$  n'a qu'une seule représentation irréductible complexe en chaque dimension. En dimension 2 on ne peut donc avoir qu'un isomorphisme de  $\mathfrak{su}(2)$  ou la représentation triviale. Si les trois représentations étaient triviales  $\varphi$  ne serait pas un plongement. Il y a donc au moins un facteur  $\mathfrak{su}(2)$  tel que la projection  $p$  vérifie comme plus haut :  $\varphi \circ p$  est surjectif et on prend  $\mathfrak{m}$  égal au noyau de  $p$  : la somme des deux autres. C'est encore un idéal.

$$- \mathfrak{g} = i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{h} = i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)$$

Cela résulte de la combinaison des deux arguments précédents pour les facteurs  $i\mathbb{R}$  et  $\mathfrak{su}(2)$ , respectivement, de  $\mathfrak{g}$ .

Un idéal est en particulier une sous-algèbre de Lie. La variété  $M$  étant simplement connexe, elle est difféomorphe à  $S^3 \times S^3$ . De plus puisque  $\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ , on peut toujours le munir de l'unique (à multiple près) 2-forme  $\omega$  susceptible de représenter une structure NK invariante d'après les résultats de la section 3. Mais ici  $H$  n'est plus trivial et il faut que  $\omega$  soit  $Ad(H)$ -invariante pour le plongement précis de  $H$  choisi. Par construction, c'est le cas dès que  $Ad(H)$  est inclus dans le sous-groupe diagonal. C'est de plus une condition nécessaire,  $Ad(H)$  agissant séparément sur chaque facteur de la somme. Les seules possibilités pour  $H$  sont finalement les sous-groupes de  $S^3$  :  $\{1\}$ ,  $S^1$  et les quotients finis de  $S^3$ . En effet un espace homogène qu'on écrit  $M = G/H$  peut toujours s'écrire différemment  $M = G'/H'$  où  $G'$  est un sous-groupe d'isométries plus petit que  $G$



mais agissant toujours transitivement sur  $M$  et  $H'$  le sous-groupe d'isotropie dans  $G'$  :  $H' = H \cap G'$ .

□

### 5.6. L'espace des drapeaux

L'espace des drapeaux  $F(1, 2)$  d'un espace vectoriel hermitien  $E$  de dimension 3 est l'espace des couples  $(l, p)$  où  $l$  est une droite de  $E$  et  $p$  un plan contenant cette droite. Il apparaît naturellement dans notre liste comme  $SU(3)/S^1 \times S^1$  mais on peut aussi l'écrire  $U(3)/U(1) \times U(1) \times U(1)$  : un point  $(l, p)$  est autrement défini par une base orthonormée  $(e_1, e_2, e_3)$  telle que  $l = \mathbb{C}e_1$  et  $(e_1, e_2)$  est une base orthonormée de  $p$  ; l'action naturelle de  $U(3)$  sur  $E$  induit une action sur les drapeaux dont le groupe d'isotropie en un point  $(l, p)$  est formé d'endomorphismes qui préservent les trois droites complexes  $\mathbb{C}e_1, \mathbb{C}e_2, \mathbb{C}e_3$ , c'est à dire d'endomorphismes diagonaux dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ . De façon équivalente il existe trois fibrations  $F(1, 2) \rightarrow \mathbb{C}P(2)$  à fibres isométriques à  $\mathbb{C}P(1)$ . Sur la fibre de la première c'est la droite qui varie dans le plan, sur celle de la seconde c'est le plan autour de la droite et sur la fibre de la troisième, la deuxième droite du plan,  $\mathbb{C}e_2$ , est fixe et la droite  $l$  varie dans le plan orthogonal et le plan  $p$  avec elle autour de  $e_2$ . En fait chacune de ces fibrations est la fibration d'un espace de twisteurs au-dessus d'une variété de dimension 4. Cela permet que  $F(1, 2)$  soit muni naturellement de trois structures kähleriennes puis, par variation canonique de la submersion riemannienne, d'une structure NK (voir [43] pour la construction d'une variété NK à partir d'une submersion kählerienne générale, [5] pour les espaces de twisteurs NK). Pour chercher toutes les structures NK de  $F(1, 2)$  on ne privilégie aucune fibration ou aucune direction complexe associée à un point de l'espace de drapeaux, on regarde la représentation complexe  $Ad(H)$  de  $H = U(1) \times U(1) \times U(1)$  associée au plongement naturel dans  $G = U(3)$ . Tous les plongements de  $H$  dans  $G$  sont conjugués et donnent lieu au même espace homogène  $G/H$  en fin de compte car leur image est un tore maximal. On choisit un supplémentaire  $\mathfrak{m}$ ,  $Ad(H)$  invariant.

**Lemme 5.6.1.** — *L'espace des métriques invariantes presque hermitiennes de  $F(1, 2)$  est de dimension 3.*

*Démonstration.* — La représentation complexe  $Ad(H)$  sur  $\mathfrak{m}$  (ou la représentation linéaire isotropique) est réductible : elle se décompose en une somme de trois représentations irréductibles. En effet si on représente habituellement  $U(3)$  par les matrices unitaires et le sous-groupe  $H = S^1 \times S^1 \times S^1$  par les matrices diagonales,  $\mathfrak{u}(3)$  est l'ensemble des

matrices anti-hermitiennes et l'ensemble  $\mathfrak{k}$  des matrices avec des zéros sur la diagonale est un supplémentaire évident de  $\mathfrak{h}$ . Or il est  $Ad(H)$ -invariant. En fait si on note

$$\forall a, b, c \in \mathbb{C} \quad \langle a, b, c \rangle \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -\bar{a} & 0 & c \\ -\bar{b} & -\bar{c} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(5.32) \quad Ad_h \langle a, b, c \rangle = \langle e^{i(t-s)}a, e^{i(t-r)}b, e^{i(s-r)}c \rangle \quad \text{où } h = \begin{pmatrix} e^{ir} & 0 & 0 \\ 0 & e^{is} & 0 \\ 0 & 0 & e^{it} \end{pmatrix} \in H$$

On le scinde en trois sous-espaces invariants :

$$\begin{aligned} \mathfrak{l} &= \{ \langle a, 0, 0 \rangle \mid a \in \mathbb{C} \} \\ \mathfrak{m} &= \{ \langle 0, b, 0 \rangle \mid b \in \mathbb{C} \} \\ \text{et } \mathfrak{n} &= \{ \langle 0, 0, c \rangle \mid c \in \mathbb{C} \} \end{aligned}$$

On voit par (5.32) que

$$(5.33) \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{l}] = \mathfrak{l}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] = \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$$

La représentation  $Ad(H)$  restreinte à  $\mathfrak{l}$ ,  $\mathfrak{m}$  ou  $\mathfrak{n}$  est irréductible, par conséquent l'espace des produits scalaires  $Ad(H)$ -invariants de  $\mathfrak{k}$  ou de façon équivalente l'espace des métriques invariantes de  $F(1, 2)$  est de dimension 3.  $\square$

De plus on peut calculer

$$\begin{aligned} [\langle a, 0, 0 \rangle, \langle 0, b, 0 \rangle] &= \langle 0, 0, -\bar{a}b \rangle \\ [\langle a, 0, 0 \rangle, \langle 0, 0, c \rangle] &= \langle 0, ac, 0 \rangle \\ [\langle 0, b, 0 \rangle, \langle 0, 0, c \rangle] &= \langle -b\bar{c}, 0, 0 \rangle \end{aligned}$$

et

$$[\langle a, 0, 0 \rangle, \langle a', 0, 0 \rangle] = \begin{pmatrix} iz & 0 & 0 \\ 0 & -iz & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } z = 2Im(\bar{a}a')$$

et de même pour  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  si bien que

$$(5.34) \quad [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{h}$$

$$(5.35) \quad [\mathfrak{l}, \mathfrak{m}] = \mathfrak{n}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{l}, \quad [\mathfrak{n}, \mathfrak{l}] = \mathfrak{m}$$

Ces relations sont compatibles avec celles calculées par les auteurs de [5] p141 où notre «  $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}$  » est noté «  $\mathfrak{m}$  ». On considère comme eux le produit scalaire sur  $\mathfrak{u}(3)$  donné par :

$$\langle X|Y \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\operatorname{tr}(XY))$$

Les trois sous-espaces invariants sont deux à deux orthogonaux, on peut donc appliquer une homothétie dans chacun et obtenir encore une métrique invariante. En fait on les obtient toutes de cette façon. On note  $g$  la métrique invariante associée aux coefficients d'homotétie  $r, s, t \in ]0; +\infty[$  c'est à dire au produit scalaire

$$\langle .|. \rangle = r \langle .|. \rangle|_{\mathfrak{l} \times \mathfrak{l}} + s \langle .|. \rangle|_{\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}} + t \langle .|. \rangle|_{\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}}$$

C'est la métrique d'une submersion riemannienne au-dessus de  $\mathbb{C}P(2)$  muni de la métrique standard si et seulement si deux paramètres, supposons  $r$  et  $s$ , sont égaux à 1. Alors  $\mathfrak{n}$  est l'espace tangent à la fibre en l'origine et (5.34) exprime le fait que les fibres sont totalement géodésiques. Puisqu'il s'agit de la fibration d'un espace de twisteur au-dessus d'une variété d'Einstein auto-duale de courbure scalaire égale à 24, le théorème de Hitchin [34] ou Friedrich [22] dit que  $(F(1, 2), g)$  est kählerienne si et seulement si le troisième paramètre  $t$  vaut 2. De plus, par un autre théorème de Friedrich dans [23],

**Theorème 5.6.2.** — *Soit  $(M^4, g)$  une variété riemannienne de dimension 4. Si son espace de twisteurs  $Z \xrightarrow{\pi} M$ , muni de la métrique  $\pi^*g + tds^2$ , où  $ds^2$  est la métrique standard de  $\mathbb{C}P(1)$ , est d'Einstein pour un certain  $t > 0$ , alors  $(M^4, g)$  est auto-duale, d'Einstein, à courbure scalaire strictement positive  $R$ , et  $t$  vaut  $\frac{48}{R}$  ou  $\frac{24}{R}$ .*

La variété  $(F(1, 2), g)$  est d'Einstein si et seulement si  $t = 1$  ou  $t = 2$ . Dans le deuxième cas elle est donc Kähler-Einstein, dans le premier il s'avère (voir [5], p145) qu'elle est strictement NK. Comme en dimension 6 une variété NK est kählerienne ou d'Einstein ([27]), les seules possibilités que la variété soit NK dans le cas où deux paramètres sont égaux, par exemple  $r = s$ , sont finalement  $t = 2r = 2s$  et  $t = r = s$ .

A cause de (5.33), (5.34), (5.35), on cherche une application  $\Lambda : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{k})$ , représentant la connexion de Levi-Civita de  $g$ , de la forme

$$\begin{aligned} \Lambda(X)U &= \alpha[X, U] \\ \Lambda(U)A &= \beta[U, A] \\ \Lambda(A)X &= \gamma[A, X] \\ \Lambda(X)Y &= \Lambda(U)V = \Lambda(A)B = 0 \end{aligned}$$

où  $X, Y \in \mathfrak{l}$ ,  $U, V \in \mathfrak{m}$  et  $A, B \in \mathfrak{n}$ . Par (5.14) on a alors

$$\begin{aligned}\Lambda(U)X &= (1 - \alpha)[U, X] \\ \Lambda(A)U &= (1 - \beta)[A, U] \\ \Lambda(X)A &= (1 - \gamma)[X, A]\end{aligned}$$

En prenant dans (5.13)  $X \in \mathfrak{l}$ ,  $Y \in \mathfrak{m}$ ,  $Z \in \mathfrak{n}$  puis en permutant circulairement on obtient les conditions, d'ailleurs suffisantes

$$(5.36) \quad \begin{cases} \alpha t &= (1 - \gamma)s \\ \beta r &= (1 - \alpha)t \\ \gamma s &= (1 - \beta)r \end{cases}$$

**Lemme 5.6.3.** — *Les seules structures presque complexes invariantes de l'espace des drapeaux, compatibles avec  $g$ , sont celles représentées par la multiplication par  $\pm i$  de chacun des trois nombres complexes intervenant dans l'écriture des matrices de  $\mathfrak{k}$ .*

*Démonstration.* — On note de la même façon  $J$  une structure presque complexe invariante de  $F(1, 2)$  ou l'endomorphisme de carré  $-1$  de  $\mathfrak{k}$  qui la représente. Si on note

$$\forall a \in \mathbb{C}, \quad J\langle a, 0, 0 \rangle = \langle a', b', c' \rangle$$

$$Ad_h J\langle a, 0, 0 \rangle = \langle e^{i(t-s)}a', e^{i(t-r)}b', e^{i(s-r)}c' \rangle \quad \text{pour } h = \begin{pmatrix} e^{ir} & 0 & 0 \\ 0 & e^{is} & 0 \\ 0 & 0 & e^{it} \end{pmatrix} \in H$$

Dans l'autre sens

$$Ad_h \langle a, 0, 0 \rangle = \langle e^{i(t-s)}a, 0, 0 \rangle$$

On choisit de faire  $s = t$ . Alors il faut quels que soient  $r$  et  $s$

$$\langle a', b', c' \rangle = JAd_h \langle a, 0, 0 \rangle = Ad_h J\langle a, 0, 0 \rangle = \langle a', e^{i(s-r)}b', e^{i(s-r)}c' \rangle$$

car l'égalité centrale doit être vraie quel que soit  $h \in H$ . La seule solution est que  $b' = c' = 0$  quel que soit  $a \in \mathbb{C}$ . On procède de la même manière pour les deux autres sous-espaces et on trouve que  $J$  préserve  $\mathfrak{l}$ ,  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$ . Sur ces sous-espaces de dimension 2, ce ne peut-être que la rotation d'angle  $\pm \frac{\pi}{2}$  par rapport à  $(\cdot)|_{\mathfrak{l} \times \mathfrak{l}}$ ,  $(\cdot)|_{\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}}$  ou  $(\cdot)|_{\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}}$ .  $\square$

On note dans la suite  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  les nombres, égaux à  $\pm 1$ , tels que

$$J\langle a, b, c \rangle = \langle \varepsilon_1 a, -\varepsilon_2 b, \varepsilon_3 c \rangle$$

Puisqu'on connaît la connexion de Levi-Civita  $\nabla$  on peut calculer  $\nabla J$ . En exprimant qu'il doit être antisymétrique :

$$(\nabla_X J)Y = -(\nabla_Y J)X$$

on obtient des conditions sur  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  et  $\alpha, \beta, \gamma$ . Les trois sous-espaces étant préservés par  $J$ ,  $(\nabla_X J)Y = 0$  dès que  $X, Y$  appartiennent au même. Les autres cas donnent :

$$(5.37) \quad \begin{cases} \alpha(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) &= (1 - \alpha)(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \\ \beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) &= (1 - \beta)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ \gamma(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) &= (1 - \alpha)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \end{cases}$$

Si les trois signes sont égaux  $\alpha = 1 - \alpha$ , c'est à dire  $\alpha = \frac{1}{2}$  puis  $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$ . En reportant dans (5.36) on trouve  $r = s = t$ , c'est à dire que  $g$  est un multiple strictement positif de la métrique NK connue. S'il y a deux signes distincts en revanche toutes les lignes de (5.37) sont nulles c'est à dire  $\nabla J = 0$  et selon desquels il s'agit un paramètre dans l'écriture de la métrique est égal à la somme des deux autres. On appelle ces métriques  $g_{\lambda, \mu}$  (quand  $\alpha$  est nul – les coefficients de la métrique sont alors  $s = \lambda$ ,  $t = \mu$  et  $r = \lambda + \mu$ ),  $g'_{\lambda, \mu}$  (lorsque  $\beta = 0$ ) et  $g''_{\lambda, \mu}$  ( $\gamma = 0$ ), pour chaque couple de nombres strictement positifs  $(\lambda, \mu)$ . On a démontré la

**Proposition 5.6.4.** — *L'espace des drapeaux peut-être muni d'une seule métrique strictement NK homogène, trois-symétrique, à un changement d'échelle et à isométrie près, et des seules métriques kähleriennes homogènes  $g_{\lambda, \mu}$ ,  $g'_{\lambda, \mu}$  et  $g''_{\lambda, \mu}$ ,  $\lambda, \mu \in ]0; +\infty[$ . Ces dernières, lorsque  $\lambda = \mu$ , correspondent, à un changement d'échelle près, à la métrique kählerienne naturelle de l'espace de twisteur de  $\mathbb{CP}(2)$ , la fibration étant réalisée de trois façons différentes à partir de  $F(1, 2)$ .*

## 5.7. L'espace projectif complexe de dimension 3

Dans cette section  $\mathfrak{h} = i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)$ ,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2)$ , l'algèbre de Lie de  $Sp(2)$ .

**Lemme 5.7.1.** — *Il y a deux plongements non équivalents de  $i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)$  dans  $\mathfrak{sp}(2)$ . Le premier est le plongement standard de  $\mathfrak{u}(2)$  dans  $\mathfrak{sp}(2)$  induit par le plongement naturel de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{H}$ . Le deuxième est donné par la composition des plongements naturels  $i\mathbb{R} \hookrightarrow \mathfrak{sp}(1)$  et  $\mathfrak{su}(2) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sp}(1)$  et du plongement diagonal  $\mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(1) \hookrightarrow \mathfrak{sp}(2)$ .*

*Démonstration.* — On cherche les plongements  $j : i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{sp}(2)$ . On considère la représentation complexe  $\rho$  de dimension 4 induite par la restriction de  $j$  à  $\mathfrak{su}(2)$ . Elle commute à tout élément  $X$  de l'image de  $i\mathbb{R}$ . Comme tout endomorphisme de  $\mathfrak{sp}(2)$ , on peut voir  $X$  comme un endomorphisme complexe via l'inclusion  $\mathfrak{sp}(2) \subset \mathfrak{su}(4)$ . Il est alors

diagonalisable et son spectre est de la forme  $\{\lambda i, \mu i, -\lambda i, -\mu i\}$  où  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  car quel que soit le vecteur propre  $u$  de  $X$ ,  $ju$  est un vecteur propre pour la valeur propre opposée. Si les quatre valeurs propres sont distinctes,  $\rho$  préserve 4 sous-espaces de dimension 1, c'est-à-dire est triviale et  $j$  n'est pas un plongement. Si  $\lambda = \mu$  ou  $\lambda = -\mu$ ,  $X$  est la multiplication dans  $\mathbb{H}^2$  par un nombre imaginaire pur et  $\rho$  est la somme directe de deux représentations irréductibles de dimension 2, nécessairement conjuguées. Cela correspond au premier plongement décrit dans l'énoncé du lemme. Enfin le cas où  $\lambda$  ou  $\mu = 0$  correspond au deuxième plongement car la somme des sous-espaces propres de  $\lambda$  et  $-\lambda$  (ou  $\mu$  et  $-\mu$ ) est stable par la multiplication par  $i, j, k$ .  $\square$

En se limitant aux groupes simples, cela donne lieu à deux espaces homogènes  $M_1 = Sp(2)/S^1 \times SU(2)$  et  $M_2 = Sp(2)/S^1 \times SU(2)$  différents. Cependant le premier peut être écarté d'emblée :

**Lemme 5.7.2.** — *L'espace homogène  $M_1$  n'admet aucune 3-forme invariante.*

En particulier on ne peut trouver aucune structure SNK invariante sur  $Sp(2)/S^1 \times SU(2)$  pour ce plongement.

*Démonstration.* On représente habituellement  $\mathfrak{sp}(2)$  dans l'espace des matrices carrées  $2 \times 2$  à coefficients quaternioniques comme le sous-espace des matrices anti-autoconjuguées :

$$\mathfrak{sp}(2) = \{A \in \mathbb{H}(2) \mid A + {}^t A^* = 0\}$$

où la conjugaison quaternionique est donnée explicitement, quels que soient  $u, v \in \mathbb{C}$  par

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ a = u + jv &\mapsto a^* = \bar{u} - jv \end{aligned}$$

Alors, un supplémentaire  $Ad(H)$ -invariant de  $\mathfrak{u}(2)$  dans  $\mathfrak{sp}(2)$ , est l'ensemble  $\mathfrak{m}$  des matrices  $jA + kB$  où  $A, B$  sont des matrices à coefficients réels, symétriques. On remarque que  $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] = \mathfrak{u}(2)$  par conséquent  $M_1$  est un espace symétrique. L'automorphisme d'ordre 2 correspondant est la restriction de  $u + jv \mapsto u - jv$ ,  $u, v \in \mathbb{C}$ .

Maintenant puisque  $i$  anticommute avec  $j, k$ , le centre de  $\mathfrak{u}(2)$ ,

$$Z(\mathfrak{u}(2)) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

agit sur  $\mathfrak{m}$  avec l'unique valeur propre  $2i$  et sur  $\bigwedge^3 \mathfrak{m}^*$  avec la valeur propre  $-6i$ . Par conséquent il n'y a pas de sous-espace invariant de l'espace des 3-formes pour l'action de  $Z(\mathfrak{u}(2))$ , ni a fortiori pour celle de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{u}(2)$  ou du groupe.  $\square$

Dans la suite on ne considère plus que le deuxième plongement décrit dans l'énoncé du lemme 5.7.1. L'espace homogène  $M_2$  est isomorphe à  $\mathbb{CP}(3)$ .

En général  $\mathbb{CP}(2n-1)$  est isomorphe à  $Sp(n)/S^1 \times Sp(n-1)$ . En effet le groupe  $Sp(n)$  agit transitivement sur  $\mathbb{C}^{2n}$ , identifié à  $\mathbb{H}^n$ , en préservant les droites complexes et le groupe d'isotropie en  $u \in \mathbb{CP}(2n-1)$  de l'action induite est constitué d'endomorphismes qui préservent non seulement  $u$  mais aussi  $ju$  et agissent comme  $Sp(n-1)$  sur l'orthogonal, vu comme  $\mathbb{H}^{n-1}$ . Pour  $n=2$ ,  $Sp(2) \simeq Spin(5)$  agit transitivement sur la sphère  $S^4$  par l'intermédiaire de  $SO(5)$  et le groupe d'isotropie est l'image réciproque, par le revêtement à 2 feuillets  $\pi : Spin(5) \rightarrow SO(5)$ , de  $SO(4)$  i.e.  $Spin(4)$ . Par conséquent  $S^4 \simeq Sp(2)/Spin(4)$  et on définit une fibration  $\mathbb{CP}(3) \rightarrow S^4$  par le plongement naturel  $S^1 \times Sp(1) \hookrightarrow Sp(1) \times Sp(1) \simeq Spin(4)$ . C'est en fait la fibration de l'espace de twisteurs de  $S^4$  comme expliqué dans [47] p45.

Dès lors si on décompose l'algèbre de Lie de  $Sp(2)$  en  $\mathfrak{sp}(5) = \mathfrak{spin}(4) \oplus \mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{m}$  est identifié à l'espace tangent à l'origine de  $S^4$ . L'espace tangent à l'origine de  $\mathbb{CP}(3)$  est lui identifié à  $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$  où  $\mathfrak{n}$  est un supplémentaire de  $i\mathbb{R}$  dans  $\mathfrak{su}(2)$  si bien que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ ,  $\mathfrak{spin}(4)$  étant isomorphe à  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ .

On pose cette fois

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{H} \right\}$$

et

$$\mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a = jx + ky, \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Leur somme  $\mathfrak{k} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$  est un supplémentaire de  $\mathfrak{h}$ . Bien plus, chacun de ces sous-espaces est préservé par  $Ad(H)$ . Un élément  $h \in H$  représenté par  $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ ,  $u \in Sp(1)$  agit par l'action adjointe comme

$$Ad_h \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta} a b \\ b^* a^* e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

sur les éléments de  $\mathfrak{m}$  et

$$Ad_h \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2i\theta} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sur  $\mathfrak{n}$ . Les deux représentations de  $H$  ainsi décrites sont irréductibles, la première, de dimension 4, a fortiori car les représentations de  $Sp(1)$  données par la multiplication à droite ou à gauche dans  $\mathbb{H}$  le sont. Par conséquent  $Ad(H)\mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}$  et  $\mathfrak{k} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$  est une décomposition irréductible. L'espace des métriques homogènes est de dimension 2 et si on s'autorise un changement d'échelle elles ne sont plus décrites que par un seul paramètre,

la courbure scalaire de la fibre, isomorphe à  $\mathbb{CP}(1)$ , de la fibration riemannienne  $\mathbb{CP}(3) \rightarrow S^4$ . Autrement dit ce sont les multiples strictement positifs des métriques twistorielles au dessus de  $S^4$ , munie de sa métrique standard. Plus précisément, avec le produit scalaire sur  $\mathfrak{k}$  donné par  $\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\operatorname{tr}(XY))$  soit par

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{Re}(ab^*), \quad \left\langle \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(ab^*)$$

et  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  sont orthogonaux, les métriques twistorielles sont les métriques invariantes  $g_t$  valant  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}} + t \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}}$  sur  $T_o M \simeq \mathfrak{k}$ . En effet on a vu que  $\mathfrak{m}$  est identifié à l'espace tangent à  $S^4$  à l'origine. C'est lui qui reçoit la métrique de la base.

Finalement, à cause des mêmes théorèmes de Friedrich et Hitchin sur les espaces de twisteurs en dimension 6 cités à la section précédente on a

**Proposition 5.7.3.** — *Dans la famille  $(g_t)_{t>0}$  de métriques homogènes de  $\mathbb{CP}(3) = Sp(2)/S^1 \times Sp(1)$ , seules  $g_1$ , strictement NK 3-symétrique, et  $g_2$ , Kähler-Einstein, sont des métriques NK. Toutes les métriques NK homogènes sur  $\mathbb{CP}(3)$  sont des multiples de celles-ci.*

## 5.8. La sphère de dimension six

Le groupe exceptionnel  $G_2$ , vu comme le groupe d'automorphismes des octonions, agit transitivement sur la sphère  $S^6$ , vue comme la sphère unité du sous-espace isomorphe à  $\mathbb{R}^7$  des nombres imaginaires purs. Le groupe d'isotropie est  $SU(3)$ . Par conséquent  $S^6 \simeq G_2/SU(3)$  (voir [47], p41 pour les détails.)

Il y a une seule façon, qui vient d'être décrite, de construire un espace homogène  $M = G_2/SU(3)$  - i.e. un seul sous-groupe de  $G_2$  à conjugaison près isomorphe à  $SU(3)$  - car les deux groupes sont de même rang. La représentation d'isotropie est la représentation standard de  $SU(3)$ . Elle est irréductible et préserve une unique métrique, à homothétie près, et une unique structure presque complexe sur  $S^6$ . De plus on peut montrer que la variété presque hermitienne est SNK.

**Proposition 5.8.1.** — *La sphère  $S^6$ , vue comme l'espace homogène  $G_2/SU(3)$ , admet une seule structure presque hermitienne invariante à homothétie près. Elle est NK, 3-symétrique.*

En revanche, si on part de la variété riemannienne  $S^6$  munie de sa métrique ronde  $g$ , sans privilégier de structure homogène, elle admet une infinité de structures presque complexes



NK. En effet, contrairement à ce qui se passe pour les autres variétés NK, comme  $F(1, 2)$ ,  $\mathbb{C}P(3)$  et  $S^3 \times S^3$ , il n'y a pas ici une seule droite de spineurs de Killing qui permettrait de définir l'unique structure presque complexe compatible avec  $g$  rendant la variété NK (voir proposition 5.3.2). Afin de « compter » ces structures, on utilise l'argument suivant. A un choix de structure SNK sur  $(S^6, g)$  correspond une manière de la réaliser comme l'espace homogène  $G_2/SU(3)$ , c'est-à-dire un sous-groupe différent, isomorphe à  $G_2$ , du groupe d'isométries  $SO(7)$  ( $g$  étant fixée). Par conséquent :

**Proposition 5.8.2.** — *L'ensemble  $\mathcal{J}$  des structures presque complexes sur  $S^6$  compatibles avec  $g$ , qui rendent la variété NK, est isomorphe à  $SO(7)/G_2 \simeq \mathbb{R}P(7)$ .*

*Démonstration.* — Par le travail de Christian Bär [4] (voir aussi le corollaire 4.3.15), les structures SNK sur une variété riemannienne de dimension 6 sont en correspondance bijective avec des 3-formes différentielles sur le cône définissant une réduction de l'holonomie à  $G_2$ . Plus précisément, une structure SNK en dimension 6 est définie par 2 formes  $\omega$  et  $\psi = \lambda d\omega$ ,  $\lambda \neq 0$ . Alors la 3-forme sur le cône est

$$\rho = r^2 dr \wedge \omega + \frac{r^3}{3\lambda} \psi$$

Or, pour la sphère ronde  $S^6$ , le cône riemannien est simplement  $\mathbb{R}^7$  muni de sa métrique canonique (à un facteur près) et une forme parallèle n'est autre qu'une forme constante. Par conséquent les structures SNK sur  $(S^6, g)$  correspondent à des 3-formes extérieures stables  $\rho$  sur  $\mathbb{R}^7$ . Celles-ci forment par définition 4.3.17 un ouvert de  $\Lambda^3(\mathbb{R}^7)^*$ , de dimension 35, une orbite de  $GL(7, \mathbb{R}) : \mathcal{O} \simeq GL(7, \mathbb{R})/G_2$ . Cependant, ce n'est pas n'importe quelle forme stable qui est acceptable mais il faut que le produit scalaire canonique déterminé par  $\rho$  (par l'inclusion  $G_2 \subset SO(7)$ ) soit le produit scalaire canonique. Par conséquent  $\mathcal{J}$  n'est pas isomorphe à  $\mathcal{O}$  mais à  $SO(7)/G_2 \simeq \mathbb{R}P(7)$ .  $\square$

Une conséquence est que toute structure complexe en un point peut-être étendue en une structure presque complexe NK de la sphère.

Fixons dans la suite la courbure scalaire de la sphère :  $s = 10$ . Cela correspond à la convention choisie au chapitre 4, section 1 pour les variétés de Gray :  $d\omega$  est de norme 2. En effet, pour une variété SNK de dimension 6, la norme de  $\nabla\omega = \frac{1}{3}d\omega$  est constante (c'est la propriété de « type constant », démontrée par Gray [29]) et cette constante  $k$  est liée à la courbure scalaire par  $s = 15k$ . Donc les variétés de Gray sont d'Einstein (voir théorème 4.2.8), de courbure scalaire égale à 10.

Alors,

**Lemme 5.8.3.** — Soient  $x \in S^6$  et  $J_x$  un endomorphisme de carré -1 de  $T_x S^6$ , compatible avec  $g_x$ . Il existe une structure presque complexe  $J$  sur  $S^6$  telle que  $(S^6, g, J)$  est une variété de Gray et  $J$  vaut  $J_x$  au point  $x$ .

*Démonstration.* — L'endomorphisme  $J_x$  définit comme d'habitude une 2-forme

$$\omega_x = g(J_x \cdot, \cdot) \in \Lambda^2(T_x^* S^6)$$

On choisit aussi une 3-forme  $\psi$  appartenant à la sphère de dimension 1, de rayon 2, de l'espace des 3-formes de  $T_x S^6$  de type  $(3,0)+(0,3)$  par rapport à  $J_x$ . La 3-forme constante sur  $\mathbb{R}^7$  donnée par

$$\rho_{(x,1)} = dr \wedge \omega_x + \frac{1}{3}\psi$$

définit une réduction de l'holonomie à  $G_2$ . Par conséquent, par [4], la 2-forme

$$\omega = \frac{1}{r^2} \iota_{\partial_r} \rho$$

est la forme de Kähler d'une structure NK sur  $S^6$  prolongeant  $J_x$ , avec  $\psi = (d\omega)_x$ .  $\square$

L'ensemble des endomorphismes de carré  $-1$  sur  $T_x S^6$  compatibles avec  $g_x$  comme dans la proposition 5.8.3 est la fibre de l'espace de twisteurs riemannien de  $S^6$ , isomorphe à  $SO(6)/U(3)$ . Cependant puisqu'il faut choisir aussi une 3-forme  $\psi$ , l'ensemble des structures presque complexes NK compatibles avec  $g$  est finalement paramétré par  $SO(6)/SU(3)$ , ce qui donne une version géométrique de l'isomorphisme

$$\frac{SO(6)}{SU(3)} \simeq \frac{SO(7)}{G_2} \simeq \mathbb{R}P(7) \simeq \mathcal{J}$$

Ceci achève la classification des variétés NK homogènes simplement connexes de dimension 6. En passant on a démontré la conjecture 5.2.16 en dimension 6 et d'après Nagy [43], en toute dimension. Les résultats sont résumés dans les théorèmes 5.1.1 et 5.1.2.

## CHAPITRE 6

### ESPACE DE TWISTEURS RÉDUIT D'UNE VARIÉTÉ PRESQUE HERMITIENNE DE DIMENSION 6

Ce chapitre aussi, comme le précédent, est issu d'un article [14], ce qui explique sa structure (par exemple le grand nombre de sections et une introduction, partiellement redondante avec l'introduction principale de la thèse). On a cependant extrait notamment certains lemmes et propositions à la section 4 qui préparaient le résultat principal de cette section, le théorème 6.4.5, pour les généraliser à d'autres variétés presque hermitiennes admettant une structure  $SU(3)$  au chapitre 3, section 3.

#### 6.1. Introduction

La théorie des twisteurs inventée par R. Penrose (voir l'article fondateur [45]) est un moyen d'utiliser les techniques efficaces de la géométrie holomorphe pour résoudre des problèmes de géométrie riemannienne ou pseudo-riemannienne.

Soit  $M$  une variété de dimension paire  $m = 2n$ . On part d'une variété complexe  $Z$ , donnée avec une submersion à fibres complexes  $\pi : Z \rightarrow M$ . On associe à tout point  $j$  de  $Z$  un endomorphisme de carré -1 de  $T_{\pi(j)}M$  (ou à toute section, une structure presque complexe de  $M$ ) en transportant la multiplication par  $i$  de  $T_jZ$  par l'isomorphisme dépendant du point  $(\pi_*)_j : T_jZ/V_j \rightarrow T_{\pi(j)}M$ , où  $V$  est la distribution verticale. Soit  $\mathcal{Z}$  le fibré de  $M$  dont la fibre au-dessus de  $x$  est l'ensemble des endomorphismes de carré -1 de  $T_xM$ . On note  $\pi_0 : \mathcal{Z} \rightarrow M$  la projection canonique. On a donc une application  $\varphi$  de  $Z$  dans  $\mathcal{Z}$ , préservant les fibres. D'autre part, il est connu que  $\mathcal{Z}_x = \pi_0^{-1}(x)$  est isomorphe en tout point à l'espace symétrique hermitien  $GL(m, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{C})$  donc admet une structure presque complexe naturelle intégrable. Alors on demande que  $\varphi$  soit injective et que, pour

tout  $x \in M$ , la restriction de  $\varphi$  à  $Z_x$  soit une injection holomorphe. Dans ce cas,  $Z$  est appelé un espace de twisteurs complexe de  $M$ .

Réciproquement, pour obtenir un espace de twisteurs sur  $M$ , on prend  $Z$  une sous-variété de  $\mathcal{Z}$  telle que la restriction de  $\pi_0$  à  $Z$  est toujours une fibration et pour tout  $x \in M$ ,  $Z_x$  est une sous-variété complexe de  $\mathcal{Z}_x$ . On construit une structure presque complexe  $\mathcal{J}$  sur  $Z$  de telle sorte qu'il soit un espace de twisteurs complexe, avec  $\varphi$  l'injection canonique, si et seulement si  $\mathcal{J}$  est intégrable. Pour cela on a besoin d'une section de la suite exacte

$$0 \rightarrow V \rightarrow TZ \rightarrow TZ/V \rightarrow 0$$

donnée d'habitude par une connexion sur  $M$  qui s'étend à  $Z$ .

Le parfait exemple d'une telle situation est la fibration à fibres  $\mathbb{CP}(1)$  de l'espace projectif complexe  $\mathbb{CP}(3)$  sur la sphère  $S^4$  dont les vertus furent découvertes par Atiyah, Hitchin et Singer dans [3]. Les mêmes auteurs ont cherché une généralisation aux variétés riemanniennes de dimension 4, en posant a priori que  $Z$  est la sous-variété de  $\mathcal{Z}$  constituée des structures presque complexes compatibles avec la métrique. Cela peut d'ailleurs être fait en dimension paire supérieure mais dès la dimension 6 la condition obtenue pour l'intégrabilité de  $\mathcal{J}$  est que la variété soit conformément plate tandis qu'en dimension 4 elle a lieu pour toute la riche classe des variétés auto-duales, en raison d'une singularité de la décomposition en composantes irréductibles, en  $m = 4$ , de la représentation de  $SO(m)$  sur l'espace des tenseurs de courbure riemannienne abstraits.

O'Brian et Rawnsley [46] regardent, eux, des espaces de twisteurs associés à une  $G$ -structure et une  $G$ -connexion. Le cas originel correspond bien sûr à  $G = SO(m)$  et la connexion de Levi-Civita. Ils se sont particulièrement intéressés au cas où  $G = U(n)$  :  $M$  étant munie d'une structure presque hermitienne  $(g, J_0)$ , on demande que les sections de  $Z$  soient compatibles avec  $g$  et commutent avec  $J_0$  et on montre section 4 qu'on peut, sans perte de généralité pour notre problème (l'intégrabilité de  $\mathcal{J}$ ), choisir la connexion presque hermitienne canonique  $\bar{\nabla}$ . Les conditions établies en section 3 porteront non seulement sur la courbure hermitienne de  $\bar{\nabla}$  mais aussi sur sa torsion qui n'est pas nulle en général, cette fois.

En dimension supérieure à 10,  $\mathcal{J}$  est intégrable si et seulement si la variété est localement conforme à une variété kählérienne (LCK) dont le tenseur de Bochner est nul. Ces dernières sont intéressantes et leur étude difficile est présentée par exemple dans [12] (voir aussi [19]). On s'intéresse ici à la dimension 6. On montre que les conditions imposées à la torsion sont moins strictes puisque outre les variétés LCK, toutes les variétés de type  $W_1 \oplus W_4$  dans la classification de Gray-Hervella [31] les satisfont. Parmi celles-là il y a en particulier les variétés strictement « nearly Kähler » (NK). Mais la forme de la courbure

de ces variétés en dimension 6 est si particulière que les conditions imposées en outre à celle-ci pour que  $J$  soit intégrable ne sont finalement satisfaites que par la sphère  $S^6$ .

Or on montre section 5 que

**Theorème 6.1.1.** — *Les variétés presque hermitiennes de dimension 6, de type  $W_1 \oplus W_4$  sont localement conformes à une variété NK.*

Ce théorème et la discussion précédente permettent de conclure :

**Theorème 6.1.2.** — *Soient  $M$  une variété presque hermitienne de dimension 6,  $Z$  son espace de twisteurs réduit,  $\mathcal{J}$  la structure presque complexe sur  $Z$  associée à la connexion hermitienne canonique :  $\mathcal{J}$  est intégrable si et seulement si  $M$  est localement conforme à une variété kählérienne dont le tenseur de Bochner est nul ou si  $M$  est localement conforme à la sphère  $S^6$  munie de sa structure NK.*

Cet article est dès lors organisé en deux parties, correspondant aux deux théorèmes principaux 6.1.1 et 6.1.2, quasiment indépendantes. C'est la résolution complète du problème soulevé dans la première partie qui rendait nécessaire l'écriture de la seconde.

La méthode utilisée à la section 5 s'inspire de l'étude des variétés NK de dimension 6. Alfred Gray a montré dans [30] que celles-ci sont soit kählériennes soit *strictement* NK (SNK). Dans le dernier cas elles ont une réduction naturelle à  $SU(3)$ . C'est de tenir toujours un meilleur compte de cette structure  $SU(3)$  que sont venus les derniers résultats les concernant. D'abord Reyes-Carrion [47] a montré que la connexion hermitienne canonique était en fait une connexion  $SU(3)$ . Puis il a découvert, ce que Hitchin a rendu explicite [36], que toute l'information pour la structure  $SU(3)$ , y compris la métrique et la structure presque complexe, est comprise dans la donnée de deux formes : la forme de Kähler  $\omega$  et la forme volume complexe  $\Psi$  (ou dans ce cas la différentielle de la forme de Kähler  $d\omega$ ), ce qui permet de caractériser les variétés SNK de dimension 6 par une équation différentielle simple portant sur la structure  $SU(3)$ .

Ici on s'intéresse à d'autres variétés presque hermitiennes de dimension 6 qu'on appelle *spéciales* c'est-à-dire à d'autres structures  $U(3)$  qui induisent une structure  $SU(3)$  sur la variété par l'intermédiaire de  $d\omega$ . Salamon et Chiossi [16], prolongeant le travail de Gray et Hervella ont classifié les variétés ayant une structure  $SU(3)$  en considérant la torsion intrinsèque. Or celle-ci est donnée par la décomposition en types de  $d\omega, d\Psi$ . Les variétés  $W_1 \oplus W_4$  sont alors caractérisées par 2 équations différentielles portant notamment sur la forme de Lee  $\theta$  et on peut montrer que celle-ci est fermée, donc elle représente localement,

par le lemme de Poincaré, un changement conforme par lequel la variété est issue d'une variété NK.

Section 6, vue l'invariance conforme de la définition de l'espace de twisteurs, réduit ou non, on reformule les résultats de la section 5 en considérant des variétés presque hermitiennes *conformes*. On laisse ouverte la question de savoir si un théorème tel que 6.1.1 a lieu en toute dimension et pour d'autres classes de variétés presque hermitiennes, stables par transformation conforme. Cette question est liée à l'existence des variétés de type  $G_1$ ,  $G_2$  de Hervella et Vidal [33]. On donne seulement un résultat d'existence locale de variétés de type  $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$  de dimension 6 non localement conformes à des variétés de type  $W_1 \oplus W_2$ .

Enfin la section 2 est consacrée à des préliminaires.

## 6.2. L'espace de twisteurs réduit et sa structure presque complexe

Soit  $Z(n)$  l'ensemble des endomorphismes unitaires de carré  $-1$  de  $\mathbb{C}^n$ . Un élément  $J$  de  $Z(n)$  a donc l'inverse  $J^{-1} = {}^t\bar{J}$  mais aussi, comme  $J^2 = -1$ ,  $J^{-1} = -J$  d'où  $J + {}^t\bar{J} = 0$ . Par cette remarque  $Z(n)$  est l'intersection  $U(n) \cap \mathfrak{u}(n)$  du groupe unitaire et de son algèbre de Lie. La donnée d'un endomorphisme de  $Z(n)$  est équivalente à la donnée d'un couple de sous-espaces complexes orthogonaux  $(F, F^\perp)$ , ses sous-espaces propres pour les valeurs propres  $i$  et  $-i$ . En classant suivant la dimension  $p$  de  $F$ , on voit que  $Z(n)$  a plusieurs composantes connexes, chacune isomorphe à une Grassmannienne complexe  $\mathcal{G}_p(\mathbb{C}^n)$ . Le groupe  $U(n)$  agit transitivement par

$$(g, J) \mapsto gJg^{-1}$$

sur chaque composante connexe qui s'identifie ainsi à l'espace homogène  $U(n)/U(p) \times U(n-p)$ . En particulier la composante correspondant à  $p = 1$  est isomorphe à  $\mathbb{C}P(n-1)$ . En revanche on élimine les composantes singulières correspondant à la multiplication par  $i$  et  $-i$  de  $\mathbb{C}^n$ . De plus  $Z(n)$  est muni d'une structure presque complexe canonique  $U(n)$ -invariante notée  $\mathcal{J}_n$ , donnée par la multiplication à gauche par  $J$  sur chaque espace tangent  $T_J Z(n)$ .

Soit  $(M, g, J_0)$  une variété presque hermitienne de dimension  $m = 2n$  (NB : par économie de notation, on appelle  $J_0$ , dans cette section et la suivante, la structure presque complexe.) L'espace de twisteurs réduit  $Z$  de  $M$  est le fibré associé du fibré principal  $U(M)$  relativement à l'action de  $U(n)$  sur  $Z(n)$ . Le sous-fibré vertical  $T^V Z$  (tangent aux fibres) est muni d'un endomorphisme  $\mathcal{J}^V$ , de carré  $-1$ , copié sur  $\mathcal{J}_n$ .

On adopte les notations suivantes :  $j$  désigne toujours un point de  $Z$ ,  $\pi : Z \rightarrow M$  est la projection canonique,  $x = \pi(j)$ . Bien sûr on peut voir  $j$  comme un endomorphisme de carré  $-1$  de  $T_x M$ , commutant avec  $(J_0)_x$  et compatible avec  $g_x$ . Alors  $\mathcal{J}_j^V$  est la multiplication à gauche par  $j$  dans  $T_j^V Z$ . D'un autre côté on notera par une majuscule  $J$  une section de  $Z$ , globale ou locale, c'est-à-dire une structure presque complexe sur  $M$  ou un ouvert de  $M$ .

Toute connexion de  $U(M)$ , c'est-à-dire toute connexion hermitienne  $\tilde{\nabla}$ , définit une connexion sur  $Z$ . On note  $\tilde{H}$  la distribution horizontale. Elle permet de compléter  $\mathcal{J}^V$  en une structure presque complexe de  $Z$  : on demande que la restriction de  $\mathcal{J}$  à  $T^V Z$  coïncide avec  $\mathcal{J}^V$  et la restriction à  $\tilde{H}$  en tout point  $j \in Z$  soit le relevé par  $\pi_*$  de  $j$  lui-même, vu comme structure presque complexe de  $T_x M$ .

Maintenant si on utilise une autre connexion  $\hat{\nabla}$  et la distribution horizontale associée  $\hat{H} \subset TZ$ , on obtient une structure presque complexe a priori différente  $\mathcal{J}'$ . On note

$$\eta_X = \tilde{\nabla}_X - \hat{\nabla}_X$$

pour tout  $X \in TM$ .

**Proposition 6.2.1.** — *Deux connexions hermitiennes définissent la même structure presque complexe sur l'espace de twisteurs réduit  $Z$  si et seulement si leur différence vérifie*

$$(6.1) \quad [\eta_{JX}, J] = J[\eta_X, J]$$

pour tout vecteur  $X$  et toute section  $J$  de  $Z$ , c'est à dire toute structure presque complexe de  $M$  commutant avec  $J_0$ .

*Démonstration.* — Soit  $U$  un vecteur tangent en  $j$  à  $Z$ . On appelle  $X = \pi_*(U)$  sa projection sur  $T_x M$ . Alors il existe une section locale  $J$  de  $Z$  telle que  $J_x = j$ ,  $J_*(X) = U$ . Par définition de la dérivée covariante

$$U = J_*(X) = \tilde{\nabla}_X J + \tilde{X}$$

où  $\tilde{X}$  désigne le relevé horizontal dans  $\tilde{H}_j$  de  $X$ . Cette décomposition est en outre la décomposition de  $U$  en sa partie verticale et sa partie horizontale, qui nous permettra de calculer  $\mathcal{J}U$ . Mais de même

$$U = \hat{\nabla}_X J + \hat{X}$$

D'où on déduit premièrement que

$$\hat{X} = \tilde{X} + \tilde{\nabla}_X J - \hat{\nabla}_X J = \tilde{X} + [\eta_X, J]$$

Puis

$$\mathcal{J}U = \mathcal{J}^V(\tilde{\nabla}_X J) + \tilde{J}\tilde{X}$$

$$\mathcal{J}'U = \mathcal{J}^V(\widehat{\nabla}_X J) + \widehat{JX}$$

On trouve que deux connexions  $\widetilde{\nabla}$  et  $\widehat{\nabla}$  donnent la même structure presque complexe si et seulement si leur différence vérifie

$$[\eta_{JX}, J] = \mathcal{J}^V[\eta_X, J]$$

qui n'est rien d'autre que (6.1), par définition de  $\mathcal{J}^V$ .  $\square$

Une question naturelle maintenant est l'intégrabilité de  $\mathcal{J}$ , en fixant une connexion, ou une classe d'équivalence de connexions définie par (6.1).

**Proposition 6.2.2.** — *La structure presque complexe  $\mathcal{J}$  de  $Z$  associée à la connexion  $\widetilde{\nabla}$ , de torsion  $T$  et de courbure  $\widetilde{R}$ , est intégrable si et seulement si*

$$(6.2) \quad T(JX, JY) - JT(X, JY) - JT(JX, Y) - T(X, Y) = 0$$

et

$$(6.3) \quad [\widetilde{R}_{JX, JY} - J\widetilde{R}_{JX, Y} - J\widetilde{R}_{X, JY} - \widetilde{R}_{X, Y}, J] = 0$$

pour tous vecteurs  $X, Y$  et toute structure presque complexe  $J$  commutant avec  $J_0$ .

*Démonstration.* — Soit  $\mathcal{N}$  le tenseur de Nijenhuis de  $\mathcal{J}$ . Comme en (3.8),

$$(6.4) \quad \mathcal{N}(U, V) = \frac{1}{4}([\mathcal{J}U, \mathcal{J}V] - \mathcal{J}[\mathcal{J}U, V] - \mathcal{J}[U, \mathcal{J}V] - [U, V])$$

pour deux champs de vecteurs  $U$  et  $V$  de  $Z$ . De plus on peut toujours décomposer ces derniers en la somme d'un champ de vecteurs vertical et d'un champ de vecteurs horizontal et par linéarité de  $\mathcal{N}$  on peut supposer que  $U$  est ou bien vertical ou horizontal, et de même pour  $V$ .

Si  $U$  et  $V$  sont deux champs de vecteurs verticaux,  $\mathcal{N}(U, V)$  au point  $j$  n'est que le tenseur de Nijenhuis de  $\mathcal{J}_n$  appliqué à  $U_j, V_j$ , moyennant l'identification de la fibre  $Z_x$  à  $Z(n)$ . Or celui-ci est nul car la structure presque complexe de  $Z(n)$  est intégrable :  $\mathcal{N}(U, V) = 0$ .

Si  $V$  est un champ de vecteurs vertical et  $U = \widetilde{X}$  est le relevé horizontal pour  $\widetilde{\nabla}$  d'un champ de vecteurs  $X$  de  $M$ ,  $[\widetilde{X}, V]$  et  $[\widetilde{X}, \mathcal{J}V]$  se projettent tous deux sur 0, c'est à dire sont verticaux, et

$$\mathcal{J}[\widetilde{X}, \mathcal{J}V] + [\widetilde{X}, V] = \mathcal{J}^V(\mathcal{L}_{\widetilde{X}}\mathcal{J}^V)V$$

Rappelons que pour un tenseur  $\mathcal{T}$  et un vecteur  $U$ , de flot  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$

$$\mathcal{L}_U \mathcal{T} = - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t)^* \mathcal{T}$$



Mais  $\mathcal{J}^V$  dépend uniquement du point où on se trouve : quels que soient  $j \in Z$ ,  $V \in T_j^V Z$ ,

$$(\varphi_t)_* \mathcal{J}^V V = (\varphi_t)_* j V = \varphi_t(j) (\varphi_t)_* V = \mathcal{J}^V (\varphi_t)_* V$$

d'où, en dérivant,  $\mathcal{L}_{\tilde{X}} \mathcal{J}^V = 0$ . Les choses sont plus compliquées pour la deuxième partie de l'expression

$$(6.5) \quad [\mathcal{J}\tilde{X}, \mathcal{J}V] - \mathcal{J}[\mathcal{J}\tilde{X}, V] = (\mathcal{L}_{\mathcal{J}\tilde{X}} \mathcal{J})V$$

à cause du fait que  $\mathcal{J}X$  n'est pas projetable donc  $[\mathcal{J}\tilde{X}, \mathcal{J}V]$ ,  $[\mathcal{J}\tilde{X}, V]$  ne sont pas verticaux. Cependant on peut prouver que (6.5) aussi est nul et par suite  $\mathcal{N}(\tilde{X}, V) = 0$ . On trouvera une approche pour la démonstration dans [26], annexe A1.

Enfin si  $U$  et  $V$  sont horizontaux, on décompose  $[U, V]$  suivant la somme directe  $T^V Z \oplus \tilde{H}$  :

$$[U, V] = [U, V]^v + [U, V]^h$$

Or pour deux vecteurs horizontaux,  $[U, V]^v$  au point  $j$  ne dépend que de  $U_j$ ,  $V_j$  (l'application est tensorielle) et vaut

$$[U, V]_j^v = [\tilde{R}_{X,Y}, j]$$

où  $X = \pi_*(U)$ ,  $Y = \pi_*(V)$ . Par définition de  $\mathcal{J}$ , au point  $j$ ,  $\pi_*(\mathcal{J}U) = jX$  et la partie verticale de  $\mathcal{N}(U, V)$  finalement est

$$(6.6) \quad \mathcal{N}(U, V)_j^v = \frac{1}{4}([\tilde{R}_{jX, jY}, j] - j[\tilde{R}_{jX, Y}, j] - j[\tilde{R}_{X, jY}, j] - [\tilde{R}_{X, Y}, j])$$

Pour calculer la partie horizontale, comme  $\mathcal{N}$  est un tenseur, on suppose que  $U$  et  $V$  sont basiques (projetables et horizontaux), i.e. il existe deux champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  de  $M$  tels que  $U = \tilde{X}$  et  $V = \tilde{Y}$ . Alors la partie horizontale du crochet, appartenant à  $\tilde{H}$ , est

$$(6.7) \quad [\tilde{X}, \tilde{Y}]^h = \widetilde{[X, Y]}$$

Les champs de vecteurs  $\mathcal{J}X$  et  $\mathcal{J}Y$  ne sont pas basiques. En particulier, il n'existe aucune section  $J$  de  $Z$  telle que  $\mathcal{J}\tilde{X} = \widetilde{JX}$ . Cependant il en existe telles que cette égalité ait lieu sur une sous-variété de dimension  $m$  de  $Z$  et c'est suffisant pour ce calcul. Pour le voir on a besoin d'un lemme (signalé par Paul Gauduchon, qui l'a déjà utilisé dans des situations similaires) :

**Lemme 6.2.3.** — Soient  $M$  une variété,  $N$  une sous-variété de  $M$ ,  $x \in N$ . Soient  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs de  $M$  tels que

(i)  $X$  est nul tout le long de  $N$

(ii)  $Y_x \in T_x N$

Alors leur crochet de Lie au point  $x$  est  $[X, Y]_x = 0$ .

*Démonstration.* — Le flot de  $X$ ,  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ , est égal à l'identité sur  $N$  à cause de (i). Par conséquent, en tout point  $y$  de  $N$  la différentielle du flot aussi, restreinte à  $TN$ , est l'identité de  $T_y N$  :

$$\forall U \in T_y N \quad (\varphi_t)_* U = U$$

On a donc

$$(\mathcal{L}_X Y)_x = - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t)_* Y_{\varphi_{-t}(x)} = - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y_x = 0$$

□

Donnons-nous maintenant une section  $J$  de  $Z$  telle que

(a)  $J_x = j$

(b)  $(\widetilde{\nabla} J)_x = 0$

Par définition de  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{J}\widetilde{Y}$  coïncide tautologiquement le long de  $J(M) \subset Z$  avec  $\widetilde{J}\widetilde{Y}$  quel que soit le champ de vecteurs  $Y$  de  $M$  :

$$\forall y \in M, \quad \mathcal{J}\widetilde{Y}_{J_y} = \widetilde{J}_y \widetilde{Y}_y$$

ce qui correspond au point (i) du lemme 6.2.3, pour le champ de vecteur  $\mathcal{J}\widetilde{Y} - \widetilde{J}\widetilde{Y}$  et la sous-variété  $J(M)$ . D'autre part (b) ci-dessus implique que  $T_j J(M) = \widetilde{H}_j$  donc tout champ de vecteurs horizontal sur  $Z$  vérifie (ii) au point  $j$ . Cela implique que  $[X, \mathcal{J}\widetilde{Y} - \widetilde{J}\widetilde{Y}]_j = 0$  c'est-à-dire

$$[\widetilde{X}, \mathcal{J}\widetilde{Y}]_j = [\widetilde{X}, \widetilde{J}\widetilde{Y}]_j$$

mais aussi  $[\mathcal{J}\widetilde{X}, \mathcal{J}\widetilde{Y}]_j = [\mathcal{J}\widetilde{X}, \widetilde{J}\widetilde{Y}]_j$  et comme  $\mathcal{J}\widetilde{X}$  coïncide aussi avec  $\widetilde{J}\widetilde{X}$  le long de  $J(M)$ ,

$$[\mathcal{J}\widetilde{X}, \mathcal{J}\widetilde{Y}]_j = [\widetilde{J}\widetilde{X}, \widetilde{J}\widetilde{Y}]_j, \quad [\mathcal{J}\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_j = [\widetilde{J}\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_j$$

On peut désormais appliquer (6.7) à chaque crochet, pour trouver que la partie horizontale de  $\mathcal{N}$  est

$$\mathcal{N}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})_j^h = \frac{1}{4}([\widetilde{J}\widetilde{X}, \widetilde{J}\widetilde{Y}] - j[\widetilde{X}, \widetilde{J}\widetilde{Y}] - j[\widetilde{J}\widetilde{X}, \widetilde{Y}] - [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]) = \widetilde{N}_J(\widetilde{X}, \widetilde{Y})_x$$

où  $N_J$  est le tenseur de Nijenhuis de  $J$ . Cependant cette expression, contrairement à (6.6), n'est pas tensorielle en la section  $J$ . Pour y arriver on met a profit la formule

$$\begin{aligned} N_J(X, Y) &= \frac{1}{4}(T(JX, JY) - JT(JX, Y) - JT(X, JY) - T(X, Y)) \\ &\quad + \frac{1}{4}((\tilde{\nabla}_{JX}J)Y - J(\tilde{\nabla}_XJ)Y - (\tilde{\nabla}_{JY}J)X + J(\tilde{\nabla}_YJ)X) \end{aligned}$$

Par (b), la deuxième ligne est nulle au point  $j$  pour notre section particulière et  $\mathcal{N}(\tilde{X}, \tilde{Y})_j^h$  est le relevé horizontal dans  $\tilde{H}_j$  de

$$\frac{1}{4}(T(jX, jY) - jT(jX, Y) - jT(X, jY) - T(X, Y))$$

qui doit être nul par conséquent, pour que  $\mathcal{J}$  soit intégrable, quels que soient  $X, Y \in TM$ .  $\square$

En transformant les tenseurs via la métrique en des tenseurs totalement covariants, (6.1), (6.2) et (6.3) deviennent respectivement

$$(6.8) \quad \eta(X, Y, Z) - \eta(JX, JY, Z) - \eta(JX, Y, JZ) - \eta(X, JY, JZ) = 0$$

$$(6.9) \quad T(X, Y, Z) - T(JX, JY, Z) - T(JX, Y, JZ) - T(X, JY, JZ) = 0$$

$$\begin{aligned} (6.10) \quad &\tilde{R}(X, Y, Z, T) - \tilde{R}(JX, JY, Z, T) - \tilde{R}(JX, Y, JZ, T) - \tilde{R}(X, JY, JZ, T) \\ &+ \tilde{R}(JX, Y, Z, JT) + \tilde{R}(X, JY, Z, JT) + \tilde{R}(X, Y, JZ, JT) - \tilde{R}(JX, JY, JZ, JT) = 0 \end{aligned}$$

### 6.3. Résolution des équations d'intégrabilité

Pour résoudre ces équations, on complexifie l'espace tangent et tous ses espaces de tenseurs et on étend les tenseurs  $T$ ,  $\eta$ ,  $\tilde{R}$  par  $\mathbb{C}$ -linéarité. Chaque vecteur  $X$  de  $T_{\mathbb{C}}M$  peut être décomposé suivant les sous-espaces propres  $T^{1,0}$ ,  $T^{0,1}$  de  $J_0$  en

$$X = X^{1,0} + X^{0,1}$$

Il peut aussi être décomposé suivant les sous-espaces propres de  $J$  en

$$X = X_J^{1,0} + X_J^{0,1}$$

où  $X_J^{1,0} = \frac{1}{2}(X - iJX)$  est la projection de  $X$  sur le sous-espace propre  $T_J^{1,0}$  de  $J$  pour la valeur propre  $i$  et  $X_J^{1,0} = \frac{1}{2}(X + iJX) \in T_J^{0,1}$  est la projection sur le sous-espace propre

de  $-i$ .

On s'attache premièrement à résoudre l'équation portant sur la torsion, c'est-à-dire qu'on cherche des conditions *nécessaires* pour que, une connexion hermitienne  $\bar{\nabla}$  étant fixée, la structure presque complexe associée  $\mathcal{J}$  soit intégrable.

Rappelons que le tenseur de Nijenhuis  $N_J$  d'une structure presque complexe  $J$  mesure le défaut pour le crochet de deux vecteurs de type  $(1, 0)$  d'être de type  $(1, 0)$ .

$$(6.11) \quad N(X, Y)_J^{0,1} = [X_J^{1,0}, Y_J^{1,0}]_J^{0,1}$$

De même on peut réécrire (6.2)

$$T(X_J^{1,0}, Y_J^{1,0})_J^{0,1} = 0$$

soit, quel que soit  $J$  compatible avec  $g$

$$(6.12) \quad T(X_J^{1,0}, Y_J^{1,0}, Z_J^{1,0}) = 0$$

équation équivalente, par conjugaison (puisque  $T$  est l'extension d'un tenseur réel) à

$$(6.13) \quad T(X_J^{0,1}, Y_J^{0,1}, Z_J^{0,1}) = 0.$$

De la même façon, on obtient que (6.1) est équivalente à

$$(6.14) \quad \eta(X_J^{1,0}, Y_J^{1,0}, Z_J^{1,0}) = 0.$$

On a vu que  $J$ , en tant que section du fibré adjoint  $\mathfrak{so}(m)$ , agit sur les espaces de tenseurs, en particulier sur l'espace des tenseurs 3 fois covariants par

$$J.T(X, Y, Z) = -T(JX, Y, Z) - T(X, JY, Z) - T(X, Y, JZ)$$

Comme  $J$  est diagonalisable, avec les valeurs propres  $i$  et  $-i$  sur  $\lambda^1$ , il l'est encore sur  $\bigotimes^3 \lambda^1$  avec les valeurs propres  $3i$  (c'est à dire  $i + i + i$ ),  $-3i$ ,  $i(= i + i - i)$  et  $-i$ . Soit  $T$  un vecteur propre pour la valeur propre  $3i$ .

$$(6.15) \quad 3iT(X, Y, Z) = -T(JX, Y, Z) - T(X, JY, Z) - T(X, Y, JZ)$$

On peut supposer sans perte de généralité que tous les vecteurs apparaissant dans cette équation,  $X, Y$  et  $Z$  sont de « type pur », c'est à dire appartiennent soit à  $T_J^{1,0}$  soit à  $T_J^{0,1}$ . L'équation (6.15) dit alors que  $T(X, Y, Z)$  est nul sauf si  $X, Y, Z$  appartiennent tous les trois à  $T_J^{0,1}$ . Par conséquent pour des vecteurs quelconques

$$T(X, Y, Z) = T(X_J^{0,1}, Y_J^{0,1}, Z_J^{0,1})$$

On verrait de même que  $T$  appartient au sous-espace propre pour la valeur propre  $-3i$  si et seulement si

$$T(X, Y, Z) = T(X_J^{1,0}, Y_J^{1,0}, Z_J^{1,0})$$

et par conséquent (6.12) et (6.13) sont les équations de la somme directe des sous-espaces propres de  $i$  et  $-i$  dans  $\bigotimes^3 \lambda^1$ .

Maintenant, pour que la partie horizontale de  $\mathcal{N}$  soit nulle,  $T$  doit vérifier cette équation quel que soit  $J$  commutant avec  $J_0$ . Appelons  $\mathcal{T}$  l'espace des tenseurs de type torsion qui le vérifient. Il est  $U(n)$ -invariant. En effet,  $J$  n'est pas en général invariant par un élément  $g \in U(n)$  mais envoyé par lui sur une autre structure presque complexe  $gJg^{-1}$  commutant avec  $J_0$ . C'est pourquoi pour trouver  $\mathcal{T}$ , on décompose l'espace des tenseurs de type torsion en chaque point en composantes irréductibles de la représentation de  $U(n)$  et on fixe une structure presque complexe  $J$  commutant avec  $J_0$ . Si une composante  $W$  a une intersection non nulle avec les sous-espaces propres de  $J$  pour les valeurs propres  $3i$  ou  $-3i$ , elle n'apparaît pas dans la décomposition de  $\mathcal{T}$ . Dans le cas contraire, si  $J$  n'a que les valeurs propres  $i$  et  $-i$  sur  $W$ , par invariance, c'est aussi le cas de toutes les autres structures presque complexes obtenues à partir de  $J$  par conjugaison avec un certain  $g \in U(n)$ , c'est-à-dire appartenant à la même composante connexe de l'espace de twisteurs  $Z$ . Pour obtenir une condition d'intégrabilité de  $\mathcal{J}$  il suffit par conséquent d'étudier les sous-espaces propres d'une section  $J$  par composante connexe ou bien on peut chercher des conditions d'intégrabilité partielle de  $\mathcal{J}$ , en se restreignant à une sous-variété connexe de  $Z$ . Les conditions obtenues sont éventuellement différentes pour des composantes connexes distinctes, comme on va montrer que c'est le cas en dimension 8.

Comme on a vu au chapitre 1, il revient au même de travailler avec  $T$  ou  $\tilde{\eta} = \nabla - \tilde{\nabla}$  :

$$T(X, Y) = \tilde{\eta}_X Y - \tilde{\eta}_Y X$$

On choisit le second, qui est une section de  $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(M) \simeq \Lambda^1 \otimes \Lambda^2$ . Décomposons cet espace sous l'action de  $U(n)$ .

$$\Lambda^1 \otimes \Lambda^2 = (\Lambda^1 \otimes \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket) \oplus (\Lambda^1 \otimes \llbracket \lambda^{1,1} \rrbracket)$$

Le premier sous-espace se décompose comme en (3.18) en

$$\Lambda^1 \otimes \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket \simeq \llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket \oplus \llbracket U^1 \rrbracket \oplus \llbracket \lambda_0^{2,1} \rrbracket \oplus \Lambda^1$$

Pour le second, on reproduit (2.12) :

$$\lambda^{1,0} \otimes \lambda^{1,1} \simeq \lambda^{2,1} \oplus U^2$$

**Proposition 6.3.1.** — *Si  $M$  est de dimension supérieure à 10,  $\mathcal{T} \simeq \Lambda^1 \oplus \Lambda^1 \oplus \Lambda^1$ . Si  $M$  est de dimension 6,  $\mathcal{T} \simeq \Lambda^1 \oplus \Lambda^1 \oplus \Lambda^1 \oplus \llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket$ .*

Le cas de la dimension 8 reçoit plus loin, à la proposition 6.3.3, un traitement plus raffiné.

*Démonstration.* — Soit  $J$  un endomorphisme de carré  $-1$ , commutant avec  $J_0$ . On diagonalise simultanément  $J$  et  $J_0$  en chaque point. Soient  $F$  le sous-fibré de  $T^{\mathbb{C}}M$  où  $J$  coïncide avec  $J_0$ ,  $G$  le sous-fibré sur lequel il vaut  $-J_0$ . On a  $F \oplus G = T^{\mathbb{C}}M$  et même

$$\lambda^{1,0} = \lambda^{1,0}F \oplus \lambda^{1,0}G$$

$$\lambda^{0,1} = \lambda^{0,1}F \oplus \lambda^{0,1}G$$

où  $\lambda^{1,0}F$  est l'ensemble des formes de type  $(1,0)$  qui s'annulent sur  $G$ , etc. Une autre façon de le dire est  $\lambda^{1,0}F = \lambda^{1,0} \cap l^{1,0}$ , où  $l^{1,0}$  est l'espace des 1-formes de type  $(1,0)$  *par rapport* à  $J$ ,  $\lambda^{1,0}G = \lambda^{1,0} \cap l^{0,1}$ , etc. On a donc aussi

$$\begin{aligned} l^{1,0} &= l^{1,0}F \oplus l^{1,0}G \\ &= \lambda^{1,0}F \oplus \lambda^{0,1}G \end{aligned}$$

où  $l^{1,0}F$  est comme on s'y attend l'ensemble des formes de type  $(1,0)$  *par rapport* à  $J$  qui s'annulent sur  $G$ , etc.

Les composantes de  $\mathcal{T}$  sont celles qui ne rencontrent pas  $\odot^3 l^{1,0}$  ni  $\odot^3 l^{0,1}$ . Or

$$\odot^3 l^{1,0} = \odot^3 \lambda^{1,0}F \oplus (\odot^2 \lambda^{1,0}F \otimes \lambda^{0,1}G) \oplus (\lambda^{1,0}F \otimes \odot^2 \lambda^{0,1}G) \oplus \odot^3 \lambda^{0,1}G$$

Examinons premièrement l'intersection de chaque terme de cette somme directe avec  $\lambda^1 \otimes \lambda^{2,0}$ .

Le premier,  $\odot^3 \lambda^{1,0}F$  a une intersection non réduite à 0 avec  $\lambda^{3,0} : \lambda^{3,0}F$ . Il a aussi une intersection non nulle avec  $U^1$  qu'on peut noter  $U^1F$ .

Le deuxième  $\odot^2 \lambda^{1,0}F \otimes \lambda^{0,1}G$  a une intersection non nulle avec  $\lambda_0^{2,1} : \lambda^{2,0}F \otimes \lambda^{0,1}G$  (Il est à noter que, comme  $F$  et  $G$  sont  $J$ -stables, orthogonaux,  $\lambda^{2,0}F \otimes \lambda^{0,1}G$  a une intersection nulle avec  $\lambda^{1,0}$  car celui-ci est obtenu dans  $\lambda^{2,1}$  en faisant le produit extérieur avec  $\omega \in \lambda^{1,1}F \oplus \lambda^{1,1}G$ .)

Enfin les deux derniers sous-espaces  $\lambda^{1,0}F \otimes \odot^2 \lambda^{0,1}G$  et  $\odot^3 \lambda^{0,1}G$  ont une intersection nulle avec  $\lambda^1 \otimes \lambda^{2,0}$ .

On procède de même pour les composantes de  $\lambda^1 \otimes \lambda^{1,1}$ . Le sous-espace isomorphe à  $\lambda_0^{2,1}$  a une intersection non nulle avec  $\odot^3 l^{1,0} : \lambda^{2,0}F \otimes \lambda^{0,1}G$  et  $U_0^2$  intersecte  $\odot^3 l^{1,0}$  suivant  $\sigma^{2,0}F \otimes \lambda^{0,1}G$ .

Finalement il semble que tous les sous-espaces irréductibles de  $\Lambda^1 \otimes \Lambda^2$ , sauf ceux isomorphes à  $\Lambda^1$ , rencontrent le sous-espace propre de  $J$  pour la valeur  $3i$ . Cependant il

faut voir que si les dimensions de  $F$  ou  $G$  sont petites, certaines des intersections sont réduites à 0. Ainsi si  $F$  est de dimension 2 ou 4,  $\lambda^{3,0}F = \{0\}$ . Mais alors et pourvu que  $M$  soit de dimension supérieure à 10,  $G$  est de dimension supérieure à 6 et  $\lambda^{3,0}$  rencontre  $\odot^3 l^{0,1}$  s'il ne rencontre pas  $\odot^3 l^{1,0}$ .  $\square$

**Corollaire 6.3.2.** — *Soit  $(M, g, J_0)$  une variété presque hermitienne de dimension  $m = 2n$ . Une condition nécessaire d'intégrabilité de  $\mathcal{J}$  est que  $M$  soit localement conformément kählérienne en dimension supérieure à 10 ou de type  $W_1 \oplus W_4$  en dimension 6.*

*Démonstration.* — Pour une connexion hermitienne  $\tilde{\nabla}$ , la partie de la différence  $\tilde{\eta} = \nabla - \tilde{\nabla}$  dans  $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(M)^\perp \simeq \Lambda^1 \otimes \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket$  est fixe, égale à  $\bar{\eta}$  par (1.27). Or les conditions imposées à  $T$  ou  $\tilde{\eta}$  pour que  $\mathcal{J}$  soit intégrable impliquent que les composantes dans  $W_2 \simeq \llbracket U^1 \rrbracket$  et  $W_3 \simeq \llbracket \lambda_0^{2,1} \rrbracket$  sont nulles en dimension 6, ainsi que la composante dans  $W_1$  en dimension supérieure à 10.  $\square$

La particularité de la dimension 6 vient de ce que  $\dim_{\mathbb{C}} F$  et  $\dim_{\mathbb{C}} G$  sont toutes deux strictement inférieures à 6 pourvu que  $J$  ne soit pas  $J_0$ , ni son opposé. Alors  $\lambda^{1,0}F$ ,  $\lambda^{0,1}G$  sont de dimension 1 ou 2 et  $\lambda^{3,0}F$ ,  $\lambda^{0,3}G$  sont réduits à 0. En dimension 8 c'est encore le cas si  $\dim_{\mathbb{C}} F = \dim_{\mathbb{C}} G = 4$  c'est à dire si  $J$  et  $J_0$  déterminent la même orientation. Appelons  $Z_1$  le sous-fibré de  $Z$  engendré par ces sections et  $Z_2$  le sous-fibré supplémentaire. Or les composantes connexes de  $Z$  sont exactement caractérisées par les dimensions des sous-espaces  $F$  et  $G$ , car il faut voir  $J_0$  comme la multiplication par  $i$ . On en déduit que  $Z_1$  est connexe tandis que  $Z_2$  a deux composantes connexes correspondant respectivement à  $\dim_{\mathbb{C}} F = 2$ ,  $\dim_{\mathbb{C}} G = 6$  et  $\dim_{\mathbb{C}} F = 6$ ,  $\dim_{\mathbb{C}} G = 2$ . Si  $J$  est une section de  $Z_2$ , un parmi  $\lambda^{3,0}F$ ,  $\lambda^{3,0}G$ , selon les cas, est non réduit à 0 par conséquent, quel que soit le tenseur  $T$  de  $\llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket$ , il existe  $J \in Z_2$  tel que  $T$  ne vérifie pas (6.2). Ce qui nous intéresse alors en cette dimension sont plutôt les restrictions notées  $\mathcal{J}_1$ ,  $\mathcal{J}_2$  de  $\mathcal{J}$  à ces sous-fibrés. Soit  $M$  une variété presque hermitienne de dimension 8. On note  $\mathcal{T}_1$  (resp.  $\mathcal{T}_2$ ) le sous-espace de l'espace des tenseurs de torsion abstraits dont les éléments vérifient (6.2) *quelle que soit la section  $J$  de  $Z_1$  (resp.  $Z_2$ ), c'est-à-dire correspondant à une condition nécessaire d'intégrabilité de  $\mathcal{J}_1$  (resp.  $\mathcal{J}_2$ ).*

**Proposition 6.3.3.** — *En dimension 8,  $\mathcal{T}_1 \simeq \Lambda^1 \oplus \Lambda^1 \oplus \Lambda^1 \oplus \llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket$  mais  $\mathcal{T}_2 \simeq \Lambda^1 \oplus \Lambda^1 \oplus \Lambda^1$ .*

**Corollaire 6.3.4.** — *Soit  $M$  de dimension 8. La structure presque complexe  $\mathcal{J}_1$  de  $Z_1$  est intégrable seulement si la variété est de type  $W_1 \oplus W_4$  mais pour que  $\mathcal{J}_2$  soit intégrable il faut que  $M$  soit localement conformément kählérienne.*

Aucun travail supplémentaire n'est nécessaire pour réduire (6.1) qui est identique à (6.2) à ceci près que  $\eta$  vit dans le sous-espace  $\Lambda^1 \otimes [\lambda^{1,1}]$  de  $\Lambda^1 \otimes \Lambda^2$ . On en déduit que deux connexions hermitiennes définissent la même structure presque complexe de l'espace des twisteurs réduits si et seulement si leur différence est dans  $\Lambda^1 \oplus \Lambda^1$ . On définit de cette façon une relation d'équivalence sur les connexions hermitiennes de  $(M, g, J_0)$  de telle sorte que la construction de  $\mathcal{J}$  sur l'espace de twisteurs réduits est une injection de l'ensemble des classes d'équivalence dans l'espace des structures presque complexes de  $Z$ . L'énoncé suivant groupe les deux résultats

**Proposition 6.3.5.** — *La structure presque complexe de  $Z$  associée à une connexion hermitienne ne peut être intégrable que si cette connexion appartient à la même classe d'équivalence que la connexion hermitienne canonique  $\bar{\nabla}$ . De plus il faut que la torsion de  $\bar{\nabla}$  appartienne à  $\Lambda^1 \simeq W_4$  en dimension supérieure à 8 ou à  $\Lambda^1 \oplus [\lambda^{3,0}] \simeq W_1 \oplus W_4$  en dimension 6.*

On est donc fondé dans la suite (recherche de conditions suffisantes) à s'intéresser seulement à la connexion hermitienne canonique  $\bar{\nabla}$ .

On veut maintenant résoudre l'équation (6.3) portant sur la courbure. Soit  $\bar{R}$  la courbure de  $\bar{\nabla}$ . De même que pour la torsion,  $\mathcal{T}$  était le plus gros sous-espace  $U(n)$ -invariant tel qu'une structure presque complexe  $J$  commutant avec  $J_0$ , agissant sur les tenseurs de type torsion, n'y ait que les valeurs propres  $i$  et  $-i$ , jamais  $3i$  ni  $-3i$ , de même  $\mathcal{R}$ , l'ensemble des tenseurs qui vérifient (6.3), est l'espace, isomorphe à la représentation  $\Lambda^2 \otimes [\lambda^{1,1}]$  de  $U(n)$ , des tenseurs de courbure hermitienne abstraits, à l'exclusion des composantes irréductibles qui admettent  $\pm 4i$ , comme valeur propre de  $J$ . En effet  $J$  agit sur  $\lambda^2 \otimes \lambda^2$  avec les valeurs propres  $0, \pm 2i, \pm 4i$  et (6.3) peut être réécrite

$$(6.16) \quad \tilde{R}(X_J^{1,0}, Y_J^{1,0}, Z_J^{1,0}, T_J^{1,0}) = 0$$

Si on note  $p, q$  les projecteurs de  $\lambda^2 \otimes \lambda^2$  définis par

$$\begin{aligned} p(\tilde{R})(X, Y, Z, T) &= \tilde{R}(X_J^{1,0}, Y_J^{1,0}, Z_J^{1,0}, T_J^{1,0}) \\ q(\tilde{R})(X, Y, Z, T) &= \tilde{R}(X_J^{0,1}, Y_J^{0,1}, Z_J^{0,1}, T_J^{0,1}) \end{aligned}$$

le sous-espace propre pour la valeur propre  $4i$  est l'image de  $p$  (d'équation  $p(\tilde{R}) = \tilde{R}$ ) tandis que le sous-espace propre pour la valeur  $-4i$  est  $Im(q)$ . Par conséquent la somme des sous-espaces propres des valeurs propres restantes,  $0$  et  $\pm 2i$ , est l'intersection des noyaux de  $p, q$  et  $\mathcal{R}$  est dans celui-ci le sous-espace des tenseurs réels (un tenseur réel  $\tilde{R}$  qui vérifie  $p(\tilde{R}) = 0$ , c'est à dire (6.16) vérifie automatiquement  $q(\tilde{R}) = 0$ .)



On décompose  $\Lambda^2 \otimes [\lambda^{1,1}]$  sous l'action de  $U(n)$  :

$$\Lambda^2 \otimes [\lambda^{1,1}] = \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket \otimes [\lambda^{1,1}] \oplus [\lambda^{1,1}] \otimes [\lambda^{1,1}]$$

La décomposition en composantes irréductibles des deux sous-espaces intervenant dans la dernière décomposition est donnée par (2.13) et (2.14) respectivement, en dimension supérieure à 8, et (2.15), (2.16) en dimension 6. On examine l'intersection de chaque composante avec  $\odot^4 l^{1,0}$  et  $\odot^4 l^{0,1}$ .

$$\begin{aligned} \odot^4 l^{1,0} = \odot^4 \lambda^{1,0} F \oplus (\odot^3 \lambda^{1,0} F \otimes \lambda^{0,1} G) \oplus (\odot^2 \lambda^{1,0} F \otimes \odot^2 \lambda^{0,1} G) \\ \oplus (\lambda^{1,0} F \otimes \odot^3 \lambda^{0,1} G) \oplus \odot^4 \lambda^{0,1} G \end{aligned}$$

–  $\odot^4 \lambda^{1,0} F$  n'a d'intersection non nulle qu'avec  $\lambda^{2,0} \otimes \lambda^{2,0}$ . De même  $\odot^4 \lambda^{0,1} G$  ne nous intéresse pas.

–  $\odot^3 \lambda^{1,0} F \otimes \lambda^{0,1} G$  a une intersection non nulle avec  $\lambda_0^{3,1}$  (égale à  $\lambda^{3,0} F \otimes \lambda^{0,1} G$ ) et avec  $V^2$  (isomorphe à  $U^1 F \otimes \lambda^{0,1} G$ .)

–  $\lambda^{1,0} F \otimes \odot^3 \lambda^{0,1} G$  est le conjugué du précédent.

– Enfin  $\odot^2 \lambda^{1,0} F \otimes \odot^2 \lambda^{0,1} G$  a une intersection non nulle avec  $\lambda_0^{2,2}$  ( $\lambda^{2,0} F \otimes \lambda^{0,2} G$ ),  $V^1$  ( $\lambda^{2,0} F \otimes \sigma^{0,2} G$ ),  $\overline{V^1}$  et  $\sigma_0^{2,2}$  ( $\sigma^{2,0} F \otimes \sigma^{0,2} G$ ).

Par conséquent les composantes qu'il faut éliminer sont  $\llbracket \lambda_0^{3,1} \rrbracket$ ,  $\llbracket V^2 \rrbracket$ ,  $[\lambda_0^{2,2}]$ ,  $\llbracket V^1 \rrbracket$ ,  $[\sigma_0^{2,2}]$ , en dimension supérieure à 10 et  $\llbracket V_0^2 \rrbracket$ ,  $\llbracket V^1 \rrbracket$ ,  $[\sigma_0^{2,2}]$  en dimension 6.

Cependant,

**Proposition 6.3.6.** — *Soit  $(M, g, J)$  une variété presque hermitienne de type  $W_1 \oplus W_4$ , de dimension 6. Les composantes dans  $\llbracket V^1 \rrbracket$  et  $\llbracket V^2 \rrbracket$  de la courbure  $\overline{R}$  de la connexion hermitienne canonique  $\overline{\nabla}$  sont nulles.*

*Démonstration.* — Soit une variété de type  $W_1 \oplus W_4$ . Les composantes de la torsion intrinsèque dans  $W_2$  et  $W_3$  sont nulles,

$$(6.17) \quad \overline{\eta} = \xi + \vartheta$$

Par conséquent (1.39) devient

$$(6.18) \quad \begin{aligned} b(\overline{R}) = & b([\xi, \xi] - a(\overline{\nabla}\xi) - a(\overline{\nabla}\vartheta) - a(\xi.\xi) \\ & + [\xi, \vartheta] + [\vartheta, \xi] - a(\vartheta.\xi) - a(\xi.\vartheta) + [\vartheta, \vartheta] - a(\overline{\nabla}\vartheta) - a(\vartheta.\vartheta)) \end{aligned}$$

Comme  $\bar{\nabla}$  est une connexion hermitienne,  $\bar{\nabla}_X \xi \in W_1$  c'est-à-dire  $\bar{\nabla} \xi$  est une section de  $\Lambda^1 \otimes W_1 \simeq \Lambda^1 \otimes \llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket$ . De même  $\bar{\nabla} \vartheta$  en tout point vit dans un espace isomorphe, comme espace de représentation de  $U(n)$ , à  $\Lambda^1 \otimes \Lambda^1$  car  $W_4 \simeq \Lambda^1$ . Puis, les tenseurs  $a(\xi, \xi)$  et  $[\xi, \xi]$  vivent dans un espace isomorphe à  $\llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket \otimes \llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket$ ; les tenseurs  $a(\vartheta, \xi)$ ,  $a(\xi, \vartheta)$ ,  $[\xi, \vartheta]$  et  $[\vartheta, \xi]$  dans un espace isomorphe à  $\Lambda^1 \otimes \llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket$ , enfin  $a(\vartheta, \vartheta)$  et  $[\vartheta, \vartheta]$  vivent dans un espace isomorphe à  $\Lambda^1 \otimes \Lambda^1$ . Or par (1.40),

$$(6.19) \quad \bar{R} = \bar{R}_0 + \bar{R}^\perp$$

où  $\bar{R}^\perp$  dépend algébriquement de  $b(\bar{R})$  et  $\bar{R}_0 \in \mathcal{K}(\mathfrak{u}(n))$  est un tenseur de type courbure kählérienne. On décompose les divers espaces de représentation :

$$(6.20) \quad \begin{aligned} \Lambda^1 \otimes \Lambda^1 &= [\lambda_0^{1,1}] \oplus \mathbb{R} \oplus \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket \oplus \llbracket \sigma^{2,0} \rrbracket \oplus \mathbb{R} \\ \Lambda^1 \otimes \llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket &= \llbracket V^3 \rrbracket \oplus \llbracket \lambda^{4,0} \rrbracket \oplus \llbracket \lambda_0^{3,1} \rrbracket \oplus \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket \end{aligned}$$

où  $V^3$  est la représentation irréductible (complexe) de poids dominant  $(2, 1, 1, 0, \dots, 0)$ . En dimension 6,  $\llbracket \lambda^{4,0} \rrbracket$  et  $\llbracket \lambda_0^{3,1} \rrbracket$  sont réduits à  $\{0\}$  dans la dernière décomposition. De plus,

$$\llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket \otimes \llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket = \llbracket \lambda^{3,0} \rrbracket \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$

Enfin la décomposition de  $\mathcal{K}(\mathfrak{u}(n))$  est donnée par (2.18). On voit qu'aucun de ces sous-espaces ne contient une composante isomorphe à  $\llbracket V_0^1 \rrbracket$  ou  $\llbracket V_0^2 \rrbracket$  par conséquent les composantes correspondantes de  $\bar{R}$  sont nulles.  $\square$

Par ailleurs seul  $R$  a éventuellement une composante non nulle dans  $[\sigma_0^{2,2}]$  par conséquent, en dimension 6, la condition porte indifféremment sur la courbure hermitienne ou la courbure riemannienne. C'est ce qui autorise l'interprétation de O'Brian et Rawnsley dans [46] en termes de tenseur de Bochner généralisé tel que défini par [51] pour la courbure riemannienne de toute variété presque hermitienne.

**Theorème 6.3.7.** — *Soit  $M$  une variété presque hermitienne de dimension 6 et  $\tilde{\nabla}$  une connexion hermitienne. La structure presque complexe  $\mathcal{J}$  de l'espace de twisteurs réduit associée à  $\tilde{\nabla}$  est intégrable si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites*

- (i) *La connexion  $\tilde{\nabla}$  définit la même structure presque complexe que la connexion hermitienne canonique  $\bar{\nabla}$ ;*
- (ii) *La variété est de type  $W_1 \oplus W_4$ ;*
- (iii) *Le tenseur de Bochner est nul.*

En particulier, par (4.13) pour une variété de Gray, (iii) implique que  $R$  est le tenseur de courbure de la sphère  $S^6$ .

**Corollaire 6.3.8.** — *L'unique variété strictement NK dont l'espace de twisteurs réduit est muni d'une structure presque complexe  $\mathcal{J}$ , intégrable, associée à la connexion hermitienne canonique, est la sphère  $S^6$ .*

En dimension supérieure à 10 la variété doit être localement conformément kählérienne, ce qui correspond à  $\xi = 0$  dans (6.17). Par conséquent, compte-tenu de (6.20), la condition est là encore réduite à l'annulation de la composante dans  $[\sigma_0^{2,2}]$ . En outre, la même remarque précédant le théorème 6.3.7 est valable. Comme de plus le tenseur de Bochner est un invariant conforme on a

**Théorème 6.3.9.** — *Soit  $M$  une variété presque hermitienne de dimension supérieure à 10. La structure presque complexe  $\mathcal{J}$  de l'espace de twisteurs réduit, associé à une connexion hermitienne  $\tilde{\nabla}$  est intégrable si et seulement si*

- (i)  $\tilde{\nabla}$  définit la même structure presque complexe sur  $Z$  que la connexion hermitienne canonique  $\bar{\nabla}$
- (ii)  $M$  est localement conforme à une variété kählérienne dont le tenseur de Bochner est nul

C'est le résultat obtenu par O'Brian et Rawnsley. Il reste valable en dimension 8 à condition de se restreindre à la sous-variété  $Z_2$  de  $Z$  définie plus haut.

#### 6.4. Variétés de type $W_1 \oplus W_4$

La question posée dans cette section est : toutes les variétés de type  $W_1 \oplus W_4$ , de dimension 6, sont-elles localement conformément NK ? Autrement dit, pour ces variétés, la forme de Lee,  $\theta$  représente-t-elle toujours un changement conforme local, c'est à dire est-elle fermée (localement exacte) ?

Par le travail fait au chapitre 3, section 2, les variétés de type  $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$  sont caractérisées par

$$d\omega = \bar{\psi} + \omega \wedge \theta$$

où  $\psi \in [\lambda^{3,0}]$  et  $\theta \in \Lambda^1$  et parmi celles-là, les variétés de type  $W_1 \oplus W_4$  sont celles vérifiant

$$(6.21) \quad \bar{\eta} = \xi + \vartheta.$$

A titre de comparaison, les variétés de type  $W_2 \oplus W_4$  sont caractérisées par

$$d\omega = \omega \wedge \theta.$$

De cette dernière équation on tire, en différentiant

$$0 = d^2\omega = \omega \wedge d\theta$$

De là que, en dimension supérieure ou égale à 6,  $\theta$  est fermée (localement exacte) et les variétés de la classe  $W_2 \oplus W_4$  sont localement conformes à des variétés de type  $W_2$ . En particulier  $\nabla\omega \in W_4$  si et seulement si la variété est conformément kählérienne, comme il est bien connu. En dimension 4 a contrario, toutes les variétés presque hermitiennes sont de type  $W_2 \oplus W_4$  et de type  $W_4$  si et seulement si la structure presque complexe est intégrable.

On donne maintenant la définition suivante

**Définition 6.4.1.** — On appelle « spéciale » une variété presque hermitienne telle que la norme de  $\bar{\psi} = (d\omega)^{3,0}$  est constante, égale à 2.

Or on peut toujours supposer pour notre problème qu'une variété  $W_1 \oplus W_4$  est spéciale, localement autour d'un point où  $\bar{\psi}$  n'est pas nulle. En effet, d'abord la classe  $W_1 \oplus W_4$  est stable par un changement conforme (voir [31].) Puis, si on substitue  $g' = fg$  à  $g$ , où  $f$  est une fonction strictement positive sur la variété,  $\omega$  est remplacée par  $\omega' = f\omega$  et

$$\begin{aligned} d\omega' = d(f\omega) &= df \wedge \omega + f d\omega \\ &= \left(\frac{df}{f} + \theta\right) \wedge f\omega + f\psi \end{aligned}$$

Par conséquent  $\theta$  est remplacée par la 1-forme cohomologue  $\theta' = \theta + \frac{df}{f}$  (en particulier  $\theta$  est fermée si et seulement si  $\theta'$  l'est),  $\bar{\psi}$  par  $\bar{\psi}' = f\psi$  et sa norme par

$$|\bar{\psi}'|_{g'} = f|\bar{\psi}|_{g'} = f^{-\frac{1}{2}}|\bar{\psi}|_g$$

Localement sur un ouvert où  $\bar{\psi}$  ne s'annule pas on peut donc choisir  $f$  pour que la norme de  $\bar{\psi}' = (d\omega')^{3,0}$  par rapport à la nouvelle métrique  $g'$  soit constante égale à 2.

De plus, en dimension 6, ce ne peut-être que par ce changement conforme, ou un changement proportionnel, qu'on transforme si possible la variété de type  $W_1 \oplus W_4$  en variété NK ou de type  $W_1$ . En effet le changement conforme est donné par le rapport des normes de  $\psi$  et  $\psi'$  comme on vient de voir. Or les variétés NK non kählériennes en dimension 6 sont de « type constant » c'est-à-dire ont  $\nabla\omega$  ou  $\bar{\psi}$  de norme constante. Cette discussion est résumée dans le

**Lemme 6.4.2.** — Les propositions suivantes sont équivalentes

- (i) Les variétés de type  $W_1 \oplus W_4$ , de dimension 6 sont localement conformément NK
- (ii) Les variétés de type  $W_1 \oplus W_4$  spéciales de dimension 6 sont NK.

On se restreint dans la suite aux variétés de type  $W_1 \oplus W_4$  spéciales de dimension 6. L'intérêt est qu'on peut s'appuyer sur cette 3-forme qui ne s'annule jamais pour obtenir des restrictions sur la géométrie de la variété, en s'inspirant des méthodes utilisées pour les variétés SNK. En premier lieu on dispose sur  $M$  d'une structure  $SU(3)$  en posant, comme pour les variétés de Gray,  $\psi = \bar{\psi}$ .

On peut appliquer les résultats du chapitre 3, section 3. Cependant la situation est plus favorable que dans le cas générique car la structure  $SU(3)$  n'est pas quelconque par rapport à la structure presque hermitienne mais la 3-forme  $\psi$  est issue de la différentielle de la forme de Kähler  $d\omega$  comme sa partie de type  $(3,0)+(0,3)$ . Alors le lemme 3.3.14 s'explique en

**Lemme 6.4.3.** — *Pour une variété presque hermitienne spéciale de dimension 6,  $n_1 = 0$ , i.e.*

$$(d\psi)^{2,2} = \nu_2 \wedge \omega$$

avec  $\nu_2 \in [\lambda_0^{1,1}]$ , et  $m_1$  est constante égale à  $-\frac{2}{3}$ .

### Remarque

Une démonstration du lemme 3.3.14 faisait intervenir le tenseur de Nijenhuis via la formule (3.66) pour des formes de type  $(3,0)$  ou  $(0,3)$ . Appliquée maintenant à une 2-forme  $\alpha \in \lambda^{2,0}$ ,

$$(d\alpha)^{1,2} = N_1 \# \alpha + N_2 \# \alpha$$

Plus précisément,

$$(d\alpha)_0^{1,2} = N_2 \# \alpha$$

En effet, soit  $(X, Y, Z)$  un repère orthonormé de  $T^{1,0}M$ . Alors  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$  est un repère orthonormé de  $T^{0,1}M$ .

$$\begin{aligned} (d\alpha)^{1,2}(X, \bar{Y}, \bar{Z}) &= \alpha(X, N(\bar{Y}, \bar{Z})) \\ &= \alpha(X, N_2(\bar{Y}, \bar{Z})) \end{aligned}$$

car  $N_1(\bar{Y}, \bar{Z})$  est colinéaire à  $X$  (le tenseur *réel*  $N_1$  est totalement antisymétrique.) Par conséquent, pour une variété presque hermitienne  $(d\alpha)_0^{1,2}$  est nulle quelle que soit  $\alpha$  de type  $(2,0)$  si et seulement si  $N_2 = 0$ . Les variétés de type  $W_1 \oplus W_4$  vérifient de surcroît  $(d\omega)_0^{1,2} = 0$ . C'est ce qui autorise la construction par Salamon (dans [48], p44) d'un sous-complexe du complexe de de Rham pour ces variétés.

**Proposition 6.4.4.** — Soit  $M$  une variété presque hermitienne de type  $W_1 \oplus W_4$  spéciale de dimension 6. Il existe  $\kappa \in \Lambda^1$  telle que

$$(6.22) \quad d\psi = \kappa \wedge \psi$$

$$(6.23) \quad d\phi = \kappa \wedge \phi - \frac{2}{3}\omega \wedge \omega$$

*Démonstration.* — On applique la proposition 3.3.16, (ii) pour obtenir la partie de type (3,1)+(1,3) de  $d\psi$ ,  $d\phi$  :

$$\begin{aligned} (d\psi)^{3,1} &= \kappa \wedge \psi \\ (d\phi)^{3,1} &= \kappa \wedge \phi \end{aligned}$$

où  $\kappa = -(J\sigma + \theta)$ . En ce qui concerne la partie de type (2,2),  $\mu_2 = \nu_2 = 0$  par la proposition 3.3.13 puis  $m_1, n_1$  sont donnés par le lemme 6.4.3 :

$$\begin{aligned} (d\psi)^{2,2} &= 0 \\ (d\phi)^{2,2} &= -\frac{2}{3}\omega \wedge \omega \end{aligned}$$

On obtient (6.22), (6.23) en additionnant les deux équations. □

On peut maintenant énoncer le

**Theorème 6.4.5.** — Soit  $M$  une variété de type  $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$  c'est-à-dire vérifiant

$$(6.24) \quad d\omega = \psi + \omega \wedge \theta$$

- (i)  $(d\psi)^{2,2} = 0$  si et seulement si  $(d\theta)^{1,1} = 0$   
(ii) Et si  $M$  est de dimension 6,  $N_2 = 0$  ou  $w_2 = 0$ , i.e.  $M$  est de type  $W_1 \oplus W_4$  si et seulement si elle est localement conformément NK.

*Démonstration.* — Le premier point résulte simplement de la différentiation de l'équation caractéristique (6.24)

$$(6.25) \quad 0 = d\psi + \psi \wedge \theta + \omega \wedge d\theta$$

La 4-forme  $\omega \wedge d\theta$  se scinde suivant les types en

$$\omega \wedge d\theta = \omega \wedge (d\theta)^{2,0} + \omega \wedge (d\theta)^{1,1}$$

Le dernier terme est nul si et seulement si  $d\psi$  est de type (3,1)+(1,3).

Pour prouver le deuxième point on se place dans les hypothèses de la proposition 6.4.4 en se ramenant aux variétés spéciales grâce au lemme 6.4.2. Par (6.22),  $d\psi$  est de type  $(3,1)+(1,3)$  donc (i) s'applique :

$$(d\theta)^{1,1} = 0$$

En outre, en différentiant, on obtient

$$0 = d^2\psi = d\kappa \wedge \psi$$

ce qui implique que  $d\kappa$  est de type  $(1,1)$  car l'application

$$\begin{aligned} \llbracket \lambda^{2,0} \rrbracket &\rightarrow \Lambda^5 \\ \alpha &\mapsto \alpha \wedge \psi \end{aligned}$$

est bijective. Mais alors on a aussi  $d\sigma \wedge \phi = 0$  (il n'y a pas de forme de type  $(4,1)$ ) et en différentiant maintenant (6.23), en tenant compte que  $\psi \wedge \omega = 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= -\kappa \wedge d\phi - \frac{4}{3}d\omega \wedge \omega \\ &= \frac{2}{3}\kappa \wedge \omega \wedge \omega - \frac{4}{3}\theta \wedge \omega \wedge \omega \\ &= \frac{2}{3}(\kappa - 2\theta) \wedge \omega \wedge \omega \end{aligned}$$

Par conséquent  $\theta = \frac{1}{2}\kappa$  et  $d\theta$  est de type  $(1,1)$  c'est-à-dire, finalement, nulle.

Comme on a supposé que la variété était spéciale, c'est-à-dire la norme de la 3-forme  $\overline{\psi}$  déjà constante, on doit montrer que cela implique que  $\theta$  aussi est nulle. Or (6.25) devient maintenant  $d\psi = \theta \wedge \psi$  et (6.22),  $d\psi = 2\theta \wedge \psi$  d'où  $\theta \wedge \psi = 0$ .

Réciproquement Gray et Hervella [31] ont montré qu'une variété localement conformément NK est de type  $W_1 \oplus W_4$ .

Les équations (6.22) et (6.23) sont finalement les équations caractéristiques d'une variété de Gray (4.3). Toute variété presque hermitienne de type  $W_1 \oplus W_4$  spéciale de dimension 6 est strictement NK et par le lemme 6.4.2 toute variété de type  $W_1 \oplus W_4$  de dimension 6 est localement conformément NK.  $\square$

## 6.5. Variétés presque hermitiennes conformes

De ce théorème et du corollaire 6.3.8 découle le théorème annoncé 6.1.2. Mais c'est aussi une pièce d'un problème plus général.

Gray et Hervella [31] ont défini 16 classes  $\bigoplus_{i \in I} W_i$ ,  $I \subset \{1, 2, 3, 4\}$  de variétés presque hermitiennes en décomposant le tenseur  $\nabla J$  (ou  $\nabla \omega$ , ces deux tenseurs étant interchangeables, via la métrique, pour ce problème) sous l'action du groupe de structure  $U(n)$ . Or ils remarquent que 8 parmi ces classes, celles dont la définition comprend  $W_4$ , sont invariantes conformes et que  $\forall I \subset \{1, 2, 3\}$ ,  $\bigoplus_{i \in I} W_i \oplus W_4$  contient non seulement les variétés de la classe plus petite  $\bigoplus_{i \in I} W_i$  mais encore toutes les variétés localement conformes à des variétés de ce type. La question se pose alors si ces dernières épuisent toute la classe.

Par le théorème 6.4.5 la réponse est positive en dimension 6 dans le cas de  $W_1 \oplus W_4$ . On a vu au début de la section 5 que  $W_2 \oplus W_4$  était de même constituée seulement de variétés localement conformément  $W_2$  (presque kähleriennes ou symplectiques) et que  $W_4$  ne contenait que les variétés localement conformément kähleriennes, en dimension supérieure à 6.

Au contraire il existe des variétés hermitiennes, c'est-à-dire dans la classe  $W_3 \oplus W_4$ , non localement conformes à des variétés de type  $W_3$ . En effet soit  $M$  le produit d'une surface de Riemann  $S$ , de forme de Kähler  $\omega_0$ , et d'une variété hermitienne  $N$  de dimension 4 (une surface complexe) non LCK (c'est le cas génériquement). La forme de Kähler  $\omega_1$  de  $N$  vérifie donc  $d\omega_1 = \theta_1 \wedge \omega_1$  pour une 1-forme  $\theta_1$ , non fermée par hypothèse. Alors la forme de Kähler de  $M = S \times N$  est  $\omega = \omega_0 + \omega_1$  et on vérifie que la forme de Lee est  $\theta = \frac{1}{2}\theta_1$ , telle que  $d\theta \neq 0$ .

De plus on s'apprête à donner (voir corollaire (6.5.9) ) un résultat d'existence locale de variétés de type  $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$  de dimension 6 non issues de variétés semi-kähleriennes par un changement conforme c'est-à-dire vérifiant (6.24) mais là encore  $d\theta \neq 0$ .

Afin de donner une formulation intrinsèque de ces résultats, on considère des variétés presque hermitiennes conformes, au sens suivant. Soient une variété  $M$ , de dimension  $m$ . Pour tout  $k$  on note  $\mathcal{L}^k$  et on appelle *fibré des scalaires de poids  $k$*  le fibré associé de  $GL(M)$

$$\mathcal{L}^k = GL(M) \times_{|det|^{k/n}} \mathbb{R}$$

de sorte que le fibré des scalaires de poids 0 s'identifie à  $M \times \mathbb{R}$  et  $\mathcal{L}^k \otimes \mathcal{L}^l = \mathcal{L}^{k+l}$ . Une structure conforme sur  $M$  est la donnée d'une classe conforme de métriques  $C$  ou encore d'une section  $c$  de  $S^2(T^*M) \otimes \mathcal{L}^{-2}$  telle que pour tout vecteur  $X$  non nul,  $c(X, X)$  est strictement positif (c'est-à-dire s'écrit  $l \otimes l$  pour une section non nulle  $l$  de  $\mathcal{L}$ ). Le lien entre ces deux définitions est que le choix d'une métrique  $g$  dans  $C$  correspond à une trivialisatoin ou une section  $l$  de  $\mathcal{L}$  qui permette d'écrire

$$g = c \otimes l^2$$



La structure conforme  $c$  fournit les isomorphismes

$$\begin{aligned} TM &\rightarrow \Lambda^1 \otimes \mathcal{L}^2 \\ X &\mapsto X^c \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Lambda^1 &\rightarrow TM \otimes \mathcal{L}^{-2} \\ \alpha &\mapsto \alpha^\diamond \end{aligned}$$

analogues des « isomorphismes musicaux »  $X \mapsto X^b$  et  $\alpha \mapsto \alpha^\sharp$  dans le cas riemannien. La compatibilité entre une métrique et une structure presque complexe, telle qu'elle définit une variété presque hermitienne, si elle a lieu pour une métrique de  $C$ , a lieu pour toutes les métriques de la classe. C'est pourquoi

**Définition 6.5.1.** — On appelle variété presque hermitienne conforme une variété  $M$  munie d'une structure conforme  $c$  et d'une structure presque complexe  $J$  compatibles au sens que

$$\forall X, Y \in TM, \quad c(JX, JY) = c(X, Y)$$

De façon équivalente il existe une réduction du fibré des repères à  $CU(n)$ , identifié canoniquement à  $\mathbb{R}_+^* \times U(n)$ . En l'absence de métrique on ne dispose plus de connexion de Levi-Civita mais de connexions de Weyl : soit  $D$  la dérivée covariante d'une telle connexion, linéaire, sans torsion et préservant  $c$ . On regarde  $DJ \in \Lambda^1 \otimes \mathfrak{co}(M)$ . En fait  $\forall X \in TM$ ,  $D_X J$  est antisymétrique (relativement à  $c$  ou à toute métrique de la classe conforme), c'est-à-dire appartient à  $\mathfrak{so}(M)$ , bien défini même en l'absence de métrique. De plus en dérivant  $J^2 = -Id$  on obtient qu'il anticommute à  $J$ . Par conséquent  $DJ \in \Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(M)^\perp$  (où l'orthogonal est toujours pris dans  $\mathfrak{so}(M)$ ). En restreignant la représentation de  $CU(n)$  à  $U(n)$  on peut décomposer cet espace en composantes irréductibles comme en (3.18) dans le cas riemannien. Or les sous-espaces  $W_i$  sont aussi invariants sous l'action de  $\mathbb{R}_+^*$  donc il s'agit finalement de la décomposition en composantes irréductibles de la représentation de  $CU(n)$ . Choisissons maintenant une connexion de Weyl différente  $D'$ . On cherche à comparer  $DJ$  et  $D'J$ . Chacune de ces deux connexions induit une connexion linéaire sur  $\mathcal{L}$ , notée respectivement  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ . On peut calculer  $D$  ou  $D'$  connaissant  $\mathcal{D}$  (resp.  $\mathcal{D}'$ ) par un analogue de la formule de Koszul :

$$\begin{aligned} 2c(D_X Y Z) &= \mathcal{D}_X(c(Y, Z)) + \mathcal{D}_Y(c(X, Z)) - \mathcal{D}_Z(c(X, Y)) \\ &\quad + c(Z, [X, Y]) - c(Y, [X, Z]) - c(X, [Y, Z]) \end{aligned}$$

On appelle  $\tau$  la 1-forme telle que, pour  $l \in \mathcal{L}$

$$(\mathcal{D}_X - \mathcal{D}'_X)l = 2\tau(X)l$$

Alors

$$c((D - D')_X Y, Z) = \tau(X)c(Y, Z) + \tau(Y)c(X, Z) - \tau(Z)c(X, Y)$$

soit

$$(6.26) \quad (D - D')_X Y = \tau(X)Y + \tau(Y)X - c(X, Y)\tau^\diamond$$

puis

$$c((D - D')_X JY, Z) = \tau(Y)c(X, JZ) - \tau(Z)c(X, JY) + \tau(JY)c(X, Z) - \tau(JZ)c(X, Y)$$

c'est-à-dire, en identifiant  $\mathfrak{so}(n)$  et  $\Lambda^2 \otimes \mathcal{L}^2$ ,

$$(6.27) \quad (D - D')_X J = X^c \wedge J\tau + JX^c \wedge \tau$$

Par conséquent on voit qu'en changeant la connexion de Weyl on ne change pas les trois premières composantes de  $DJ$  (c'est exactement ce qu'ont démontré Gray et Hervella, en se retraignant aux structures de Weyl fermées c'est-à-dire coïncidant localement avec la connexion de Levi-Civita d'une métrique de  $C$ ) mais seulement la quatrième, appartenant à  $W_4$ . D'ailleurs on peut toujours modifier  $D$  pour que celle-ci soit nulle :

**Proposition et définition 6.5.2.** — *Soit  $(M, c, J)$  une variété presque hermitienne conforme. Il existe une unique connexion de Weyl, notée  $D^J$ , telle que la composante de  $D^J J$  dans  $W_4$  est nulle. On appelle cette connexion la connexion associée à  $J$  de la variété presque conforme.*

*Démonstration.* — Soit une connexion de Weyl quelconque  $D$ . Il existe une 1-forme  $\eta$  telle que la composante dans  $W_4$  de  $DJ$  peut s'écrire (voir (3.27) pour l'analogie riemannien)

$$L(D) = JX^\flat \wedge \eta + X^\flat \wedge J\eta$$

Il suffit alors de poser, en s'inspirant de (6.26)

$$D_X^J Y = D_X Y - \eta(X)Y - \eta(Y)Z + c(X, Y)\eta^\diamond$$

Alors par (6.27),  $L(D^J) = L(D) - (D - D^J)J = 0$ . □

On est alors fondé à définir 8 classes de variétés presque hermitienne conformes de telle sorte que la classification ne dépende pas du choix d'une connexion de Weyl.

**Définition 6.5.3.** — *Soit  $(M, c, J)$  une variété presque hermitienne conforme. On dit qu'elle est de type (ou qu'elle appartient à la classe)  $W^c$ , où  $W = \bigoplus_{i \in I} W_i$ ,  $I \subset \{1, 2, 3\}$ , si pour toute connexion de Weyl  $D$ ,  $DJ$  est une section de  $W \oplus W_4$ .*

On a évidemment

**Proposition 6.5.4.** — Soient  $(M, c, J)$  une variété presque hermitienne conforme et  $g \in C$ , la classe conforme définie par  $c$ . La variété presque hermitienne  $(M, g, J)$  est de type  $\bigoplus_{i \in I} W_i \oplus W_4$  si et seulement si  $(M, c, J)$  est de classe  $\bigoplus_{i \in I} W_i^c$ .

De plus on donne la définition suivante

**Définition 6.5.5.** — Une variété presque hermitienne conforme  $(M, c, J)$  est dite fermée (resp. exacte) si la connexion associée à  $J$  est fermée (resp. exacte) en tant que structure de Weyl.

Rappelons qu'une structure de Weyl  $D$  est fermée (resp. exacte) si pour une métrique  $g \in C$ , la 1-forme  $\eta$  qui mesure la différence avec la connexion de Levi-Civita  $\nabla$  comme en (6.26)

$$(\nabla - D)_X Y = \eta(X)Y + \eta(Y)Z - c(X, Y)\eta^\sharp$$

est fermée (resp. exacte). La 1-forme  $\eta$  s'appelle la forme de Lee de  $(D, g)$  et la définition d'une structure de Weyl fermée ou exacte ne dépend pas de la métrique choisie dans la classe conforme car la forme de Lee de  $(D, g' = e^{2f}g)$  serait  $\eta' = \eta + df$ , cohomologue à la première. Or pour la connexion associée à  $J$ , la forme de Lee de  $(D^J, g)$  est égale à  $\frac{1}{2}\theta$ , c'est-à-dire, à un facteur près, à la forme de Lee de la variété presque hermitienne  $(M, g, J)$ . En effet par (3.27)

$$(\nabla - D^J)J = L(\nabla) = \frac{1}{2}(X^c \wedge J\theta + JX^c \wedge \theta)$$

On peut alors reformuler le théorème 6.1.1

**Théorème 6.5.6.** — Toute variété presque hermitienne conforme de dimension 6, de type  $W_1^c$  est fermée.

Par une remarque précédente, on a le même résultat pour les variétés presque hermitiennes conformes de type  $W_2^c$ , en dimension supérieure à 6. Voyons ce qu'il en est des variétés presque hermitiennes conformes dans la classe  $W_1^c \oplus W_2^c$ .

Rappelons (Hitchin [36], voir notre présentation à la fin du chapitre 4, section 3) que 2-formes différentielles,  $\omega \in \Lambda^2$  et  $\psi \in \Lambda^3$  suffisent à déterminer une réduction d'une variété de dimension 6 à  $SU(3)$ , par conséquent aussi la structure presque hermitienne sous-jacente, sous certaines conditions (r1), (r2) et (c1) à (c3).

Certaines de ces conditions sont ouvertes. Précisément,

**Proposition 6.5.7.** — *Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension 6. L'ensemble des couples  $(\omega, \psi) \in \Lambda^2 V^* \times \Lambda^3 V^*$  vérifiant les conditions de régularité (r1) et (r2) et la condition de compatibilité (c2) est un ouvert non vide.*

Maintenant si  $M$  est une variété presque hermitienne,  $V = T_x M$ , on peut choisir  $\psi$  déterminée par le 1-jet de la forme de Kähler au point (et même seulement par  $\omega_x, d\omega_x$ ). On appelle  $\theta_\omega$  la 1-forme telle que

$$d\omega \wedge \omega = \theta_\omega \wedge \omega \wedge \omega$$

En effet

$$\begin{aligned} \Lambda^1 &\rightarrow \Lambda^5 \\ \alpha &\mapsto \alpha \wedge \omega \wedge \omega \end{aligned}$$

est un isomorphisme si  $\omega$  est non dégénérée. Alors on pose

$$\psi_\omega = d\omega - \theta_\omega \wedge \omega$$

Les conditions du chapitre 4, section 3 portent maintenant sur le 1-jet de  $\omega$  : quel que soit  $x \in M$  on appelle  $U_x \subset (\mathcal{J}^1 \Lambda^2)_x$ , l'ouvert des 1-jets  $j$  tels que  $\omega$  et  $\psi_\omega$  satisfont les conditions de la proposition 6.5.7.

**Theorème 6.5.8.** — *Soit  $M$  une variété de dimension 6,  $x \in M$ . A tout 1-jet  $j \in U_x$ , on peut associer localement, sur un voisinage de  $x$ , une structure  $SU(3)$  telle que la structure  $U(3)$  sous-jacente est de type  $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\omega$  une 1-forme différentielle dont le 1-jet en  $x$ ,  $(j^1 \omega)_x = j \in U_x$ . En un point  $y$  suffisamment proche de  $x$ , l'opération qui à une forme associe son 1-jet étant continue,  $(j^1 \omega)_y$  reste dans  $U_y$ . Il existe un voisinage  $N$  de  $x$  tel que  $(\omega, \psi_\omega)$  vérifient (r1), (r2), (c2) en tout point de  $N$ . Elles vérifient aussi (c1) par définition de  $\psi_\omega, \theta_\omega$  :

$$\psi_\omega \wedge \omega = d\omega \wedge \omega - \theta_\omega \wedge \omega \wedge \omega = 0$$

Enfin pour que (c3) soit vérifiée il faut plutôt définir la structure  $SU(3)$  par  $(\omega, \psi' = f\psi_\omega)$  où

$$f = \sqrt{\frac{2\text{vol}(\omega)}{\text{vol}(\psi)}}$$

Les conditions (r1) et (r2) assurent que  $f$  est bien définie et  $\omega, \psi'$  continuent à vérifier les conditions, en particulier  $\psi'$  ne s'annule pas, donc elles définissent une structure  $SU(3)$  au voisinage de  $x$ .

En effet

$$\text{vol}(f\psi) = f^2 \text{vol}(\psi)$$

pour toute fonction  $f$  par (4.23) d'où  $\text{vol}(\psi') = 2\text{vol}(\omega)$ .

Maintenant la variété  $(N, g, J)$  est automatiquement de type  $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$  par construction :

$$d\omega = f^{-1}\psi' + \theta_\omega \wedge \omega$$

n'a pas de composante dans  $[\lambda_0^{2,1}]$ . □

De plus, vue la liberté dans le choix de  $\omega$ , on peut toujours demander que  $d\theta_\omega \neq 0$ .

**Corollaire 6.5.9.** — *Il existe des variétés presque hermitiennes conformes de type  $W_1^c \oplus W_2^c$  non fermées.*

## 6.6. Conclusion

La théorie des twisteurs rencontre les variétés NK au moins à deux endroits.

Premièrement Hitchin [35] a démontré que les seuls espaces de twisteurs au dessus de variétés de dimension 4, kähleriens sont  $\mathbb{CP}(3)$  au dessus de  $S^4$  et  $F(1, 2)$ , l'espace des drapeaux de  $\mathbb{C}^3$ , au dessus de  $\mathbb{CP}(2)$ , c'est-à-dire 2 parmi les 4 seules variétés homogènes de dimension 6 admettant une structure SNK (voir [13]). On obtient cette dernière à partir de la structure kählerienne en faisant une homothétie et en changeant le signe de la structure presque complexe le long de la fibre, isomorphe à  $\mathbb{CP}(1)$ . Or cette méthode est générale pour obtenir des variétés SNK à partir de submersions riemanniennes dont l'espace total est kählerien, comme a démontré Nagy dans [42]. Il prouve ainsi l'existence d'une structure SNK sur l'espace de twisteurs d'une variété Kähler-quaternionique.

Deuxièmement, par le théorème 6.1.2, les seules variétés presque hermitiennes conformes de dimension 6 ayant un espace de twisteurs réduit complexe, correspondent aux 2 types de variétés NK de dimension 6 : les variétés kähleriennes – pourvu qu'elles soient Bochner-plates –, et les variété SNK – ici seulement  $S^6$  munie de la structure conforme standard et de la structure presque complexe issue des quaternions. Au regard de la raison (traduire des problèmes sur  $M$  dans des propriétés des structures holomorphes d'objets associés à  $Z$ , voir [3]) qui fait s'intéresser aux espaces de twisteurs complexes, ce résultat est juste préliminaire.

Par exemple, en ce qui concerne  $S^6$ , étant conformément plate, elle admet aussi un espace de twisteurs classique. Il s'agit de l'hypersurface quadrique de dimension 6 complexe

$\mathcal{Q}_+$  (voir [50]), dont l'espace de twisteurs réduit  $Z$  par conséquent est une sous-variété, qu'il faudra précisément décrire.

En outre, on fait place à une observation de Berard-Bergery, Ochiai [7]. D'une importance cruciale dans la théorie des twisteurs en dimension 4 est la correspondance établie en [3] entre les fibrés holomorphes de l'espace de twisteurs, holomorphiquement triviaux sur chaque fibre, et certains fibrés appelés « auto-duaux » sur la base. Cela appelle une généralisation si possible, en suivant Slupinski [50] dans le cas riemannien.

Enfin, une particularité de  $S^6$  parmi les variétés SNK de dimension 6 est qu'elle admet plusieurs structures presque complexes  $J$  compatibles avec une métrique donnée  $g$  telles que  $(S^6, g, J)$  est NK. En lien aussi avec la théorie des spineurs de Killing, on peut espérer donner une expression naturelle de ce fait en termes de sections de l'espace de twisteurs.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. Abbena, S. Garbiero, *Almost hermitian homogeneous structures*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **31**, 375–395 (1988)
- [2] W. Ambrose, I.M. Singer, *A Theorem on holonomy*, Trans. Amer. Math. Soc. **75**, 428–443 (1953)
- [3] M.F. Atiyah, N.J. Hitchin, I.M. Singer, *Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry*, Proc. Roy. Soc. London Ser. **A 362**, 425–461 (1978)
- [4] C. Bär, *Real Killing spinors and holonomy*, Commun. Math. Phys. **154**, 509–521 (1993)
- [5] H. Baum, Th. Friedrich, R. Grunewald, I. Kath, *Twistors and Killing Spinors on Riemannian Manifolds*, Teubner-Verlag Stuttgart/Leipzig (1991)
- [6] F. Belgun, A. Moroianu, *Nearly-Kähler 6-manifolds with reduced holonomy*, Ann. Global Anal. Geom. **19**, 307–319 (2001)
- [7] L. Bérard-Bergery, T. Ochiai, *On some generalizations of the construction of twistor spaces*, in *Global riemannian geometry*, Ellis Horwood, 52–58, Chichester (1984)
- [8] M. Berger, *Sur Les Groupes d'holonomie des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes*, Bull. Soc. Math. France **83**, 279–330 (1955)
- [9] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, Berlin (1987)
- [10] T. Bröcker, T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics **98**, Springer-Verlag, New York (1985)
- [11] R. L. Bryant, *Metrics with special holonomy*, Ann. Math. **126**, 525–576 (1987)
- [12] R.L. Bryant, *Böchner-Kähler metrics*, J. Amer. Math. Soc. **14**, 623–715 (2001)

- [13] J.-B. Butruille, *Classification des variétés approximativement kähleriennes homogènes*, Ann. Global Anal. Geom. **27**, 201–225 (2005)
- [14] J.-B. Butruille, *Espace de twisteurs réduit d'une variété presque hermitienne de dimension 6*, math.DG/050315
- [15] F. M. Cabrera, *Special almost hermitian geometry*, J. Geom. Phys. **55**, 450–470 (2005)
- [16] S. Chiossi, S. Salamon, *The intrinsic torsion of  $SU(3)$  and  $G_2$  structures*, in *Differential Geometry, Valencia 2001*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 115–133 (2002)
- [17] R. Cleyton, *G-structures and Einstein metrics*, Ph.D. thesis, Odense (2001)
- [18] R. Cleyton, A. Swann, *Einstein metrics via intrinsic or parallel torsion*, math. Z. **247**, 513–528 (2004)
- [19] L. David, P. Gauduchon, *The Bochner-flat geometry of weighted projective spaces*, en préparation
- [20] M. Falcitelli, A. Farinola, S. Salamon, *Almost-hermitian geometry*, Diff. Geom. Appl. **4**, 259–282 (1994)
- [21] M. Fernandez, A. Gray, *Riemannian manifolds with structure group  $G_2$* , Ann. Mat. Pura Appl. **132**, 19–45 (1983)
- [22] Th. Friedrich, H. Kurke, *Compact four-dimensional self-dual Einstein manifolds with positive scalar curvature*, Math. Nachr. **106**, 271–299 (1982)
- [23] Th. Friedrich, R. Grunewald, *On Einstein metrics on the twistor space of a four-dimensional Riemannian manifold*, Math. Nachr. **123**, 55–60 (1985)
- [24] Th. Friedrich, I. Kath, A. Moroianu, U. Semmelmann, *On nearly parallel  $G_2$ -structures*, J. Geom. Phys. **23**, 259–286 (1997)
- [25] S. Gallot, *Équations différentielles caractéristiques de la sphère*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **12**, 235–267 (1979)
- [26] P. Gauduchon, *Structures de Weyl et théorèmes d'annulation sur une variété conforme autoduale*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **18**, 563–629 (1981)
- [27] A. Gray, *Nearly Kähler geometry*, J. Diff. Geom. **4**, 283–309 (1970)
- [28] A. Gray, *Weak holonomy groups*, Math. Z. **123**, 290–300 (1971)
- [29] A. Gray, *Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3*, J. Diff. Geom. **7**, 343–369 (1972)



- [30] A. Gray, *The structure of nearly Kähler manifolds*, Math. Ann. **223**, 233–248 (1976)
- [31] A. Gray, L.M. Hervella, *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants*, Ann. Mat. Pura Appl. **123**, 35–58 (1980)
- [32] R. Grunewald, *Six-dimensional Riemannian manifold with real Killing spinors*, Ann. Global Anal. Geom. **8**, 43–59 (1990)
- [33] L. Hervella, E. Vidal, *Nouvelles géométries pseudo-kähleriennes  $G_1$  et  $G_2$* , C. R. Acad. Sci. Paris **283**, 115–118 (1976)
- [34] N. Hitchin, *Kählerian twistor spaces*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **43**, 133–150 (1981)
- [35] N. Hitchin, *The geometry of three-forms in six dimensions*, J. Diff. Geom. **55**, 547–576 (2000)
- [36] N. Hitchin, *Stable forms and special metrics*, in *Global differential geometry : the mathematical legacy of A. Gray*, Contemp. Math. **288**, 70–89, Amer. Math. Soc., Providence (2001)
- [37] V. Kirichenko, *K-spaces of maximal rank*, Mat. Zam **22**, 465–476 (1977)
- [38] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Wiley Interscience, New York, vol. 1 (1963)
- [39] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Wiley Interscience, New York, vol. 2 (1963)
- [40] A.J. Ledger, M. Obata, *Affine and Riemannian  $s$ -manifolds*, J. Diff. Geom. **2**, 451–459 (1968)
- [41] A. Moroianu, P.-A. Nagy, U. Semmelmann, *Unit Killing vector fields on nearly Kähler manifolds*, Int. J. Math. **16**, 281–301 (2005)
- [42] P.A. Nagy, *On nearly Kähler geometry*, Ann. Global Anal. Geom. **22**, 167–178 (2002)
- [43] P.A. Nagy, *Nearly Kähler geometry and Riemannian foliations*, Asian J. Math. **6**, 481–504 (2002)
- [44] A. Newlander, L. Nirenberg, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. of Math. **65**, 391–404 (1957)
- [45] R. Penrose, *The twistor programme*, Reports on Math. Phys. **12**, 65–76 (1977)
- [46] N.R. O’Brian, J.H. Rawnsley, *Twistor spaces*, Ann. Global Anal. Geom. **3**, 29–58 (1985)
- [47] R. Reyes-Carrión, *Some special geometries defined by Lie groups*, Ph.D. thesis, Oxford (1993)
- [48] S. Salamon, *Riemannian geometry and holonomy groups*, Pitman Research Notes in Math., no. 201, Longman Scientific and Technical, New York (1989)

- [49] U. Semmelmann, *Conformal Killing forms on Riemannian manifolds*, Math. Z. **245**, 503–527 (2003)
- [50] M. J. Slupinski, *The twistor space of the conformal six sphere and vector bundles on quadrics*, J. Geom. Phys. **19**, 246–266 (1996)
- [51] F. Tricerri, L. Vanhecke, *Curvature tensors on almost Hermitian manifolds*, Trans. Amer. math. Soc. **267**, 365–397 (1981)
- [52] F. Tricerri, *Locally homogeneous Riemannian manifolds*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **50** 411–426 (1992)
- [53] J.A. Wolf, A. Gray, *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms I, II*, J. Diff. Geom. **2**, 77–114, 115–159 (1968)